Le contenu des mathématiques

On distingue habituellement entre une invention et une découverte. Une invention concerne quelque chose qui n'existait pas auparavant, que l'on a créé de toutes pièces : on invente la machine à vapeur. Une découverte concerne quelque chose qui existait auparavant, mais que l'on ne connaissait pas : on découvre les propriétés du carbone, ou l'estuaire du Zambèze.

La plupart des mathématiciens parlent de la création, dans leur discipline, comme d'une découverte : on découvre les propriétés des groupes de Lie. Elles existaient quelque part dans la nature, mais on ne les connaissait pas avant que la recherche mathématique ne les mette en évidence. Ce point de vue est conforté par la beauté interne qui se dégage des énoncés: les théorèmes sur la répartition des nombres premiers font, selon les mathématiciens, partie des merveilles de la nature, au même titre que, par exemple, les anneaux de Saturne ou les chutes du Niagara.

Même s'il est accepté par la quasi-totalité des mathématiciens, parce qu'il flatte leur ego, ce point de vue est en fait totalement erroné. Il ne résiste pas un instant à l'analyse historique, qui montre comment sont apparues les mathématiques.

A l'évidence, nos mathématiques sont construites à l'origine sur les nombres entiers : un berger quelque part a dû vouloir compter ses moutons, ou un père ses enfants ; il a employé ses dix doigts, puis des pierres ou des bâtons, et ensuite des symboles plus abstraits. Les opérations sont nées ensuite, entraînant la création de nouveaux concepts (voir l'intéressant traité "Histoire Universelle des Chiffres", de Georges Ifrah).

Il est donc parfaitement légitime de dire (ce que personne ne conteste): les mathématiques sont un langage, qui permet de décrire certains aspects quantitatifs du monde. Ce langage a ensuite évolué, s'est enrichi de nouveaux concepts venus du monde extérieur (fonction, dérivation, etc.) et de nouvelles règles de syntaxe. C'est exactement la même chose que le français ou l'anglais, qui sont des langages permettant de décrire les choses du monde extérieur et d'exprimer les sentiments. Vous viendrait-il à l'idée de dire que le français ou l'anglais sont une invention ou une découverte ? Ils ne sont ni l'un ni l'autre !

Un point très important, souligné par René Thom dans son livre "Prédire n'est pas expliquer", est celui-ci : on ne peut décrire qu'en fonction des concepts que l'on a, en fonction des mots que l'on possède. Si un concept vous manque, mettons la notion de dérivée, vous ne parviendrez pas à conceptualiser la notion de vitesse instantanée, mais seulement celui de vitesse moyenne. Les mathématiques se sont donc progressivement enrichies de nouveaux concepts, qui sont en quelque sorte la traduction mathématique de ce que nous avons perçu des phénomènes du monde extérieur.

Notre perception, notre connaissance, des lois de la nature ne sont qu'approximatives: elles reflètent à la fois les limites des moyens d'investigation (les instruments) et la portée des concepts.

Voici donc présentée maintenant une vue assez précise de ce que sont les mathématiques: à partir des besoins du berger, une évolution assez rapide (environ 6 000 ans), incorporant petit à petit les lois physiques à mesure qu'on les découvrait : fournissant d'une part le cadre pour énoncer ces lois physiques, et aussi le langage permettant de poser les questions qu'elles suscitent.

Que ce langage soit efficace, c'est affaire de point de vue personnel. Il est effectivement arrivé qu'une propriété physique soit découverte simplement à partir d'une formule mathématique, ce qui montre que le cadre descriptif était satisfaisant. Dans le cas de la mécanique quantique, on se repose entièrement sur le formalisme mathématique, sans comprendre réellement les lois physiques, c'est pourquoi René Thom la qualifie de "plus grande escroquerie intellectuelle du 20ème siècle". Mais inversement, quiconque a regardé un problème d'optimisation en vraie grandeur sait que le formalisme mathématique est lourd, inadapté, et en général insoluble.

Ce langage mathématique, créé par l'homme au fil des millénaires, est-il "naturel" ? Des êtres hypothétiques, vivant sur une autre planète, auraient-ils les mêmes mathématiques ? A ces questions, tous les mathématiciens répondent oui sans hésitation, puisque pour eux les mathématiques existent indépendamment de l'homme dans l'univers. Deux voix seulement, à notre connaissance, se sont élevées contre cette naïveté égocentrique : Von Neumann d'abord, David Ruelle ensuite.

Von Neumann écrit, dans son petit livre "The Computer and the Brain" (à lire dans la version anglaise : la traduction française a été victime de contre-sens complets) :

"It is only proper to realize that language is largely a historical accident. The basic human languages are traditionally transmitted to us in various forms, but their very multiplicity proves that there is nothing absolute and necessary about them. Just as languages like Greek or Sanskrit are historical facts and not absolute logical necessities, it is only reasonable to assume that logics and mathematics are similarly historical, accidental forms of expression. They may have essential variants…" (p. 81).

David Ruelle, dans "Is our Mathematics Natural ? The case of equilibrium statistical mechanics" : *"It may be time to attempt some cautious conclusions, remembering that the question of naturality of our mathematics is not a very well-posed problem. The influence of historical accidents should not be overrated: some concepts like those of natural numbers, or groups, would have to appear sooner or later in the development of human mathematics. Yet it is striking that some very good mathematical ideas have not been supplied by the internal logics of mathematical development, but have come from outside. Other external circumstances are conceivable, which would have led to different mathematics. How different ? My own judgment is that human mathematics could be quite different from what it is. I further think that whatever naturality our mathematics does have is not due so much to logical necessity as to the peculiar nature of human mind…"*

Ajoutons un argument à ce qui précède : nous avons vu que les mathématiques étaient issues de la notion de nombre entier. Or les nombres entiers n'existent pas dans la nature : ce ne sont que des approximations commodes, à l'échelle humaine. Par exemple, vous ne pouvez pas parler du nombre des moutons se trouvant en France le 19 mai 1999, pour trois raisons : les limites de l'espèce "mouton" ne sont pas précisément définies (il y a des animaux hybrides) ; la localisation géographique n'est pas précise (il y a des moutons juste sur la frontière) ; il y a des moutons en train de naître et d'autres en train de mourir.

Des êtres liquides ou gazeux (pourquoi n'en existerait-il pas ?) n'auraient certainement pas des mathématiques basées sur les nombres entiers, non plus que des êtres qui se subdivisent à l'infini, telles des paramécies ou des amibes.

La "méthode" d'Archimède, perdue pendant plus de 2 000 ans, n'a été redécouverte par personne pendant ce laps de temps, pourtant très long.

Nos mathématiques ont donc un très fort contenu culturel, qui va bien au delà du fait que nous comptons en base 10 parce que nous avons dix doigts. Elles reflètent complètement la découverte progressive de certaines lois de la nature, ou, plus exactement, l'interprétation que nous leur avons donnée. Cette interprétation est tout à fait arbitraire : pour décrire le comportement d'une balle de tennis, nous écrivons des équations différentielles. Mais le joueur qui rattrape la balle ne résout pas des équations différentielles !

Lorsque nous envoyons une sonde dans les étoiles, pour informer d'éventuels extra-terrestres de notre intéressante existence, nous la dotons d'informations mathématiques: des triangles, des nombres premiers, supposées compréhensibles par toute espèce vivante. C'est d'une consternante naïveté : des triangles ou des nombres premiers n'ont pas plus de valeur universelle qu'une brouette. Ils sont, exactement autant qu'elle, le reflet de notre évolution et de notre culture.

Que cette prétendue universalité des mathématiques arrange les mathématiciens et flatte leur ego, nous dirons gentiment "c'est humain". On ne peut s'empêcher d'évoquer le vers de Baudelaire : "L'humanité bavarde, ivre de son génie".

Parmi les livres dont on peut éviter la lecture, mentionnons en particulier le livre de Alain Connes et Jean-Pierre Changeux "Matière à pensée". Une chose est digne d'être remarquée par celui qui étudie l'histoire des idées et l'aptitude à l'oubli lorsqu'une idée dérange : Connes est considéré comme le "descendant mathématique" de Von Neumann ; il a eu la médaille Fields pour ses travaux sur les algèbres d'opérateurs (introduits par Von Neumann). Mais le livre de Von Neumann mentionné plus haut n'est pas cité une seule fois dans "Matière à pensée", non plus, bien sûr, que les thèses qu'il défend.

Les mathématiciens ont, sur leur discipline, un point de vue théologique, que nous pouvons qualifier de "révélationniste", si on nous pardonne ce néologisme. Il y a quelque part une vérité intrinsèque, un monde mathématique, dont le grand prêtre est le mathématicien (de talent, bien sûr), seul capable d'en pénétrer les concepts et de les révéler à l'humanité souffrante et anxieuse.

Notre point de vue (celui de Von Neumann et de Ruelle) est au contraire "évolutionniste": les mathématiques sont apparues sous forme d'un langage qui a évolué, s'est perfectionné, au fil du temps, en grande partie sous l'effet du hasard.

Fort bien, direz-vous : les deux points de vue peuvent être défendus. Il y a une liberté de culte ; vous pouvez être croyant ou athée.

On peut, bien sûr. Mais, et c'est précisément l'objet de ce débat, l'attitude sociale ne sera pas la même selon que vous serez l'un ou l'autre.

Pour le révélationniste, le mathématicien est un grand prêtre, détenteur d'une part de vérité révélée. La société lui doit le respect : il doit recevoir un salaire, jouir d'une vie confortable. Il peut enseigner directement sa discipline, comme on enseigne la théologie, puisque celle-ci représente une part du savoir de l'humanité. Les mathématiciens ne le disent peut-être pas clairement, mais c'est ce qu'ils pensent, en toute bonne foi. C'est ce qui explique en particulier que les mathématiques soient enseignés par des gens qui n'ont jamais quitté le "couvent" universitaire. Pourquoi devrait-on corrompre la vérité révélée en la "frottant" aux contraintes matérielles, celles d'une entreprise par exemple ?

L'évolutionniste, quant à lui, est beaucoup plus sceptique et beaucoup plus combatif. Sceptique, car il sait que l'outil qu'il emploie est imparfait, approximatif, balbutiant même : il n'y a guère de problème, proposé par la nature, que nous sachions correctement résoudre. Combatif, cependant : il considère que personne ne lui doit rien a priori, mais il se sent capable de faire ses preuves au cas par cas. Si imparfait que soit l'outil, il n'est pas dépourvu d'efficacité, et, surtout, il n'en existe pas de meilleur. Les railleurs, les charlatans, les adorateurs de l'empirisme, mordront la poussière à chaque combat.

Bibliographie

Connes, A. - Changeux, J.P. : Matière à pensée, Editions Odile Jacob, 1989.

Ifrah, G. : Histoire Universelle des Chiffres. Ed. Robert Laffont, 1994.

Ruelle, D. : Is our Mathematics Natural ? The case of equilibrium statistical mechanics. Bulletin American Math. Society, vol. 19, no 1, July 1988, pp. 259-268.

Thom, René : Prédire n'est pas expliquer. Collection Champs Flammarion, 1991.

Von Neumann, John : The Computer and the Brain. Yale University Press, 1958.

****

Pour lire l'article "les domaines à éviter"

Retour page emploi

Retour page d'accueil