Quelques Problèmes en Contrôle de Qualité

par

Paul Deheuvels[1]
L.S.T.A., Université Paris VI
t.45-55 E3, 4 Place Jussieu
75 252 Paris Cedex 05, France
e-mail: paul.deheuvels@upmc.fr

Résumé. Nous abordons quelques problèmes fréquents en contrôle de qualité.

1 Introduction

Le modèle classique de contrôle de qualité considère une production de N objets dont une proportion inconnue p est susceptible d'être défaillante. Nous conviendrons initialement que les règles de fabrication imposent que cette proportion soit inférieure ou égale à un niveau maximal admissible, désigné par π. Dans cette configuration de base, on admet que la production est défectueuse si ce niveau π est dépassé par p. Le contrôle de qualité se ramène alors à la vérification de l'hypothèse $p \leq \pi$ par des méthodes statistiques.

On supposera que π est une spécification imposée par le fabricant. Dans la plupart des applications, le pourcentage maximal d'objets défectueux est supposé très faible, typiquement compris entre 0.1% et 1%. Ce nombre représente le niveau maximum admissible de la probabilité qu'un item

[1]**Address for correspondence:** Paul Deheuvels, 7 avenue du Château, 92 340 Bourg-la-Reine, France

pris au hasard dans la production soit défectueux. De plus en plus souvent, les industriels préfèrent laisser π prendre une valeur quantifiable, quitte à couvrir le risque correspondant par une garantie. Le fait d'imposer une valeur de π trop basse, s'il est logique dans le cas d'équipements de haute sécurité, peut aboutir à des coûts industriels prohibitifs pour des objets de consommation courante. Si la véritable probabilité de défaut dans le lot étudié est égale à $p \leq \pi$, le nombre total Σ d'items défectueux suivra une loi binomiale, de sorte que

$$\mathbb{P}(\Sigma = k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{pour} \quad k = 0, \ldots, N.$$

Si Np est très grand, on peut approximer Σ par une loi normale $N(Np, Np(1-p))$, d'espérance Np et de variance $Np(1-p)$. La proportion véritable $\widetilde{p} = N^{-1}\Sigma$ d'items défectueux dans le lot de N objets vérifiera approximativement la règle

$$\mathbb{P}\left(\widetilde{p} > p + \frac{(1.65)\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{N}}\right) \simeq 5\%.$$

Donc, si on admet que $p \leq \pi$, la proportion véritable d'items défectueux peut atteindre

$$\pi + \frac{(1.65)\sqrt{\pi(1-\pi)}}{\sqrt{N}},$$

avec une probabilité approximativement égale à $1/20 = 5\%$. Bien sûr, on peut remplacer la quantile 1.65 à 95% de la loi normale par la quantile 1.96 à 97.5%. On obtiendra alors une *proportion véritable* (observée dans le lot de N objets) d'items défectueux pouvant atteindre

$$\pi + \frac{(1.96)\sqrt{\pi(1-\pi)}}{\sqrt{N}},$$

avec une probabilité approximativement égale à $1/40 = 2.5\%$. En fait, ces évaluations sont, le plus souvent, inutilisables, dans la mesure où elles supposent que le nombre moyen d'items défecteux est très grand, ce qui s'exprime par l'hypothèse mathématique $Np \to \infty$. En fait, la vitesse d'approximation de l'approximation normale est de l'ordre de $1/\sqrt{N\pi}$, ce qui rend celle-ci *grossièrement imprécise* pour la plupart des exemples courants.

Oublions donc les approximations normales, pour utiliser deux méthodes pour évaluer des bornes supérieures pour la proportion véritable $\widetilde{p}$.

La première méthode consiste, tout simplement, à évaluer exactement la quantile supérieure d'ordre α (par exemple, pour $\alpha = 5\%$) de la loi binomiale $B(N, \pi)$. L'une des formules les plus commode pour arriver à ce résultat est due à Bahadur, R. R. (1960). Some approximations to the binomial distribution function. *Ann. Math. Statist.* **31**, 43-54. Il part de la formule, si $X \stackrel{d}{=} B(N,\pi)$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq k) \;=\; & \binom{N}{k}\pi^k(1-\pi)^{N-k} \\ & \times(1-\pi)\; {}_2F_1(N+1,;1;k+1;\pi),\end{aligned}$$

où ${}_2F_1$ est une fonction hypergéométrique. Il suffit alors d'évaluer numériquement cette quantité, à l'aide d'un programme mathématique, tel que Mathematica ou Matlab, pour avoir le résultat cherché. On n'obtient pas une quantile exacte, puisque k doit prendre des valeurs entières, mais on choisit k de sorte que

$$k_{\max} = \min\left\{k : \sum_{\ell=k}^{N}\binom{N}{\ell}\pi^\ell(1-\pi)^{N-\ell} \leq \alpha\right\}.$$

La deuxième méthode consiste à utiliser l'approximation de la loi $B(N,\pi)$ par une loi de Poisson. Il est commode, ici, de noter $X \stackrel{d}{=} B(N,\pi)$ une variable aléatoire suivant une loi binomiale $B(N,\pi)$, et par $Y \stackrel{d}{=} \mathrm{Po}(N\pi)$ une variable aléatoire suivant une loi de Poisson d'espérance $N\pi$. On a donc

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{N}{k}\pi^k(1-\pi)^{N-k} \quad \text{pour} \quad k = 0,\ldots,N,$$

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{(N\pi)^k}{k!}\exp(-N\pi) \quad \text{pour} \quad k = 0,1,\ldots\ .$$

On utilise la *distance en variation* entre ces deux lois. Celle-ci s'écrit comme

$$\begin{aligned}\Delta_V &= \Delta_V\Big(B(N,\pi), \mathrm{Po}(N\pi)\Big)\\ &= \sup_{A\subseteq\mathbb{N}} |\mathbb{P}(X\in A)-\mathbb{P}(Y\in A)|.\end{aligned}$$

En quelque sorte, Δ_V est l'erreur maximale obtenue lorsqu'on remplace X par Y.

L'évaluation de Δ_V est un problème mathématique difficile, résolu pour l'essentiel par Deheuvels, P. et Pfeifer, D. (1986). A semigroup approach to Poisson approximation. *Ann. Probab.* **14**, 663-676. Il est commode d'utiliser la borne obtenue par Barbour, A. D. et Hall, P. (1984). On the rate of Poisson convergence. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **95**, 473-480. Celle-ci fournit

$$\Delta_V \le \pi\Big(1-e^{-N\pi}\Big) \le \min\{\pi, N\pi^2\}.$$

On retiendra de cette évaluation que l'erreur maximale obtenue lors du remplacement d'une loi binomiale par son approximation de Poisson est de l'ordre (ne pouvant être amélioré au dela d'un facteur multiplicatif) la probabilité maximale π d'observer un item défecueux.

En remplaçant la variable binomiale X par la variable de Poisson Y, on évalue, pour un niveau α fixé (par exemple

$\alpha = 5\%$), la valeur de $k^*_{\max}$ définie par

$$k^*_{\max} = \min\left\{ k : \sum_{\ell=k}^{\infty} \frac{(N\pi)^\ell}{\ell!} \exp(-N\pi) \leq \alpha \right\}.$$

On conclut de ces résultats que, sous réserve que la probabilité p qu'un item soit défectueux est inférieure à π, la proportion d'items défectueux dans le lot de N objets sera inférieure à $N^{-1}k_{\max}$ avec probabilité supérieure à $1-\alpha$, niveau qu'on peut remplacer par $N^{-1}k^*_{\max}$ avec probabilité supérieure à $1-\alpha-\pi$.

Nous mentionnons, en passant, que la loi de Poisson est commode pour approximer la loi hypergómétrique. Supposons qu'on observe en tout m items défecteux dans le lot de N objets, et qu'on analyse n items, pour trouver, parmi ceux-ci, W éléments défectueux. La loi hypergéométrique de W est alors donnée par

$$\mathbb{P}(W = j) = \frac{\binom{m}{j}\binom{N-m}{n-j}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{n}{j}\binom{N-n}{m-j}}{\binom{N}{m}}.$$

On a alors l'évaluation

$$\begin{aligned} &\Delta_V\left(\mathcal{L}(W), \mathrm{Po}\left(\frac{nm}{N}\right)\right) \\ &\leq \left\{\frac{N}{N-1}\left(\frac{n}{N} + \frac{m}{N} - \frac{n}{N}\frac{m}{N} - \frac{1}{N}\right)\right\} \\ &\times \left(1 - \exp\left(-\frac{mn}{N}\right)\right). \end{aligned}$$

Pour montrer l'intérêt de cette dernière formule, supposons que la proportion d'items défectueux dans la production de N objets soit $\pi = m/N$. Le nombre W d'items défectueux dans un échantillon de n objets pris dans cet ensemble suivra alors approximativement une loi de Poisson $\mathrm{Po}(n\pi)$, mais l'ordre de grandeur de l'erreur de variation totale comprend un terme en n/N. On ne pourra donc arriver à un niveau d'erreur meilleur que cette proportion.

2 Tests

Nous abordons maintenant le problème de la vérification de l'hypothèse $p \leq \pi$.

Pour effectuer cette vérification, on est amené à inspecter un échantillon de la production, composé de $1 \leq n \leq N$ items pris parmi ces objets. On pourra distinguer plusieurs types d'inspections, suivant qu'elles impliquent ou non la destruction de l'objet. Pour l'instant, nous laissons ces questions de côté.

Soit S_n le nombre d'objets en défaut observés dans cet échantillon. On peut écrire

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

où $X_i = 1$ ou $X_i = 0$, suivant que le $i^{\text{ème}}$ objet inspecté soit défectueux ou non. La plupart des opérateurs font une hypothèse d'*homogénéité* et d'*indépendance*, exprimée par le fait que $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires *indépendantes* et *de même loi*. Cette dernière condition revient à écrire, en notant $\mathbb{P}(\cdot)$ la probabilité,

$$\mathbb{P}(X = 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0),$$

où $0 < p < 1$ est un paramètre inconnu. Sous ces hypothèses, la loi de probabilité de S_n est binomiale, de sorte que

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{pour} \quad k = 0, \ldots, n.$$

Or, il est plus réaliste de supposer que les probabilités de défaillance des items sont possiblement différentes (la production n'est pas nécessairement homogène) et données, respectivement, par $p_1, \ldots, p_n$. Dans ce cas, le modèle binomial ne s'applique plus, et la loi de probabilité exacte du nombre d'items défaillants est complexe. Le plus simple est de l'exprimer sous forme de fonction caractéristique

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\mathrm{i}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 + p_i(e^{\mathrm{i}u} - 1)\right).$$

La seule voie commode consiste à approximer S_n par une loi de Poisson. L'erreur de variation totale est alors majorée par la borne

$$\Delta_W \left(\mathcal{L}(S_n), \mathrm{Po} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \right) \right) \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i^2}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \left(1 - \exp \left(- \sum_{i=1}^{n} p_i \right) \right).$$

D'une manière pratique, on a intérêt à travailler sur le modèle poissonnien.

Pour ce qui est du problème de test, la question à résoudre est alors de décider si, oui ou non, la proportion sous-jacente p est acceptable, eu égard au cahier des charges de la production. Suivant le modèle classique de la théorie des tests, il s'agit de *tester* l'hypothèse:

$(H.0) \quad p \leq \pi$; contre: $(H.1) \quad p > \pi$,

où π est le taux maximal de défauts de spécifié à l'avance.

On aboutit à des zones de rejet de la forme $\{S_n \geq r\}$. Le calcul de r associé à un niveau de risque α s'effectue par des méthodes numériques ne posant pas de problème particulier.

3 Discussion

Les méthodes de test présupposent un niveau de risque α spécifié. Il n'est pas toujours évident de fixer quel doit être le "bon" niveau de risque à retenir. Idéalement, celui-ci devrait être issu d'un calcul économique, basé sur le coût des diverses décisions possibles. La voie la plus raisonnable pour arriver à une telle approche décisionnelle est celle de la statistique bayésienne, où le résultat de l'échantillonnage n'est pas une décision d'acceptation ou de rejet, mais une loi de probabilité a posteriori sur p.

La procédure d'échantillonnage peut être grandement améliorée par l'usage de méthodes séquentielles. On analyse successivement $X_1, X_2, ...$, et à chaque étape, on décide, soit d'arrêter la procédure, soit de la continuer. La théorie des tests séquentiels (les SPRT "sequential probability ratio tests") n'est pas simple dans le cas présent.

Des aberrations sont facilement obtenues si la procédure d'échantillonnage est randomisée. Le choix des méthodes de randomisation peut être crucial. D'une manière générale, la planification des expériences d'essai pose de multiples problèmes (plans factoriels, hypercubes latins, etc.).
