



## La modélisation mathématique des actes de la vie courante

par Bernard Beauzamy

*Article paru dans "Quadrature", 60. p. 15-19, 2006.*

Les exemples qui suivent s'adressent à tous les publics : ils peuvent être compris aussi bien par un écolier que par un scientifique professionnel ; ils ont un sens pour celui qui a une formation littéraire comme pour celui qui a fait des études d'ingénieur. Chacun posera le problème dans ses propres termes et y apportera ses propres réponses.

Soyons très clairs dès le début : nous ne cherchons pas du tout à inciter les gens à utiliser une modélisation mathématique fine pour les faits de la vie courante. Bien au contraire, tous les exemples qui suivent montrent clairement que celle-ci est presque impossible à établir de manière correcte, très lente et très lourde à mettre en oeuvre, et très ennuyeuse en pratique : aucun de nous ne voudrait faire ceci régulièrement.

Notre conclusion est tout l'inverse : il faut s'inspirer, dans nos formulations mathématiques, du processus de décision usuel, rapide et grossier. Il y a un équilibre à rechercher entre une modélisation fine, de peu d'utilité et impossible à réaliser en pratique et une modélisation totalement empirique, où toutes les décisions sont prises de manière arbitraire. La recherche de cet équilibre est difficile, et c'est là tout l'objet de notre programme "Robust Mathematical Modeling".

### *A. Prendre une décision*

#### **1. Choix d'un itinéraire entre deux villes**

Imaginons que vous ayez le choix entre deux itinéraires, pour gagner une autre ville : l'un d'eux emprunte l'autoroute et l'autre des nationales, ou départementales. Bien sûr, il s'agit d'une situation simplifiée : en général, on dispose d'itinéraires beaucoup plus nombreux et variés.

Pouvez-vous, dans ce cas simplifié, faire la liste de tous les paramètres qui peuvent influencer sur votre choix ? Réfléchissez-y un instant, et vous vous rendrez compte que vous ne pouvez pas faire une liste exhaustive : elle peut s'allonger autant qu'on le souhaite. Et l'ordre

des paramètres ne sera pas le même d'une personne à une autre. Telle personne, par exemple, mettra parmi les paramètres influents le fait que, sur autoroute, le risque d'accident soit moins grand. Telle autre préférera la départementale parce qu'elle permet d'arriver plus tard, etc. Amusez-vous tout de même à présenter 25 paramètres pertinents, et rangez-les dans l'ordre que vous voulez.

Exemples de paramètres (A : autoroute, N : nationale)

1. Vouloir gagner du temps : A
2. Vouloir économiser de l'argent (éviter les péages) : N
3. Vouloir ne pas arriver trop tôt : N
4. Minimiser les risques dus à la circulation : A
5. L'état du véhicule ne permet pas d'aller vite : N
6. Vouloir emprunter un itinéraire déjà connu : A ou N
7. Vouloir emprunter un itinéraire nouveau : A ou N
8. Vouloir passer par un point précis : A ou N
9. Avoir une course spécifique à faire : A ou N
10. Risquer d'avoir besoin d'un médecin : N
11. Éviter les encombrements : A ou N
12. Aimer flâner : N
13. Aimer la nature, les villes, les villages : N
14. Souvenirs attachés à l'un des itinéraires : A ou N
15. Aimer rouler à vitesse constante en écoutant de la musique : A
16. Prendre des auto-stoppeurs : N
17. Choix en fonction de la météo : A ou N
18. Différences de conditions climatiques entre les deux itinéraires : A ou N
19. Choix sur les conseils d'une tierce personne : A ou N
20. Indications fournies par les panneaux de signalisation : A ou N
21. Avoir raté la bretelle d'accès à l'autoroute : N
22. Ne pas avoir d'argent sur soi pour les péages, ni de carte de crédit : N
23. Aimer faire des pointes de vitesse : A
24. Éviter les radars : A ou N
25. Propreté des toilettes dans les stations services : A
26. Avoir besoin de s'arrêter fréquemment : A
27. Réduire le coût du réapprovisionnement en carburant : N
28. Motivations de type écologique, liées aux émissions de CO<sub>2</sub> : A ou N
29. Vouloir faire le trajet en une traite pour que les enfants puissent dormir : A
30. Vouloir fractionner le trajet pour limiter la longueur des étapes : N

Comme on le voit, il est très facile de trouver des paramètres en nombre élevé, susceptibles d'influencer la décision. Mais le cerveau humain ne se pose pas toutes ces questions, et même il les trouve fatigantes : aucun d'entre nous n'accepterait de faire une "check list" de ce genre avant un départ. Nos décisions sont prises très rapidement, sur un très petit nombre de critères, auxquels nous donnons un poids affectif, largement issu de nos expériences précédentes. Comme le fait remarquer Von Neumann ("The Computer and the Brain", 1957), les méthodes de décision du cerveau humain diffèrent fondamentalement de l'optimisation mathématique.

## 2. Avion ou voiture ?

Vous avez un trajet d'environ 1000 km à faire, mettons par exemple Paris-Perpignan. Allez-vous prendre la voiture ou l'avion ? Essayez de lister correctement l'ensemble des coûts afférents à chacune des deux solutions, entre le moment du départ et celui du retour.

Là encore, il est très difficile de faire une liste exhaustive. Si vous prenez l'avion, vous devrez rajouter tous les coûts de transport sur place (taxis, location de voiture, etc.), y compris éventuellement les carburants, les parkings, les péages. Vous devez aussi, éventuellement, tenir compte des frais de parking de votre propre voiture, si vous la laissez. Inversement, si vous prenez votre voiture, vous devez tenir compte de l'amortissement, de l'usure, des risques de panne, le risque d'être victime d'un vol, etc.

Certains frais sont obligatoires (coûts des carburants), d'autres sont assortis d'une probabilité (panne, accident, contravention, etc.). Ces probabilités sont également très difficiles à établir.

On constate donc, ici encore, qu'une décision rationnelle, prise sur la base de la totalité de l'information nécessaire, est pratiquement impossible. Pourtant, nous ne nous posons pas toutes ces questions et nous décidons bien vite si nous prenons l'avion ou la voiture (ou le train !).

## 3. Comment s'habiller ?

Vous partez en voyage pour une semaine, et vous devez évidemment emporter des vêtements. Le choix rationnel se fera sur critères largement probabilistes : quelle température va-t-il faire ? Serez-vous invité à des soirées, à des sorties ? Rencontrerez-vous des gens que vous ne connaissez pas ? Prévoyez-vous des rencontres de travail, des excursions ? Il y a en outre, bien sûr, des contraintes de poids et d'encombrement.

Essayez de faire une liste de critères que vous pourriez prendre en compte et essayez de leur affecter une probabilité. Essayez d'avoir une approche aussi complète que possible : vous n'y parviendrez pas et vous allez vous énerver !

## 4. Attendre le bus

Vous attendez le bus, mais le bus ne vient pas. Vous n'avez aucun moyen de savoir s'il est simplement en retard, ou bien s'il a eu un accident, s'il a été annulé pour cause de grève, etc. Les gens qui attendaient avec vous partent les uns après les autres. Attendez-vous ou partirez-vous ? Sur quels critères prendrez-vous votre décision ?

### *B. Evaluer l'efficacité d'une action*

#### 1. Efficacité des prières

S'est-on jamais demandé si, par des techniques statistiques appropriées, on pouvait juger de l'efficacité des prières ? Ceux qui prient, quel que soit le dieu auquel cette prière s'adresse, sont-ils récompensés ? Voient-ils leurs vœux s'exaucer ? On teste bien l'efficacité

d'un médicament ; on peut également vouloir tester l'efficacité d'une prière, d'une requête, d'une offrande.

## 2. Traductions

On voudrait que la traduction d'une langue A à une langue B soit biunivoque : à toute idée de A correspond une idée de B et une seule ; et si on repart de B, l'application inverse redonne la phrase choisie initialement. C'est là le modèle idéal de la traduction, calqué sur la notion mathématique de bijection.

Malheureusement, il n'en est rien, même pour des langues aussi proches que le français et l'italien. Chaque langue a ses idées propres, qui ne sont exactement traduisibles dans aucune autre ; une traduction est toujours approximative. Elle ne rend jamais complètement les connotations propres à chaque langue, les sous-entendus, les modes de pensée propres à chaque culture.

C'est d'autant plus vrai que les deux langues sont plus éloignées. Champollion, sur la foi de la Pierre de Rosette, a cru déchiffrer les hiéroglyphes. Mais qui dit que la Pierre contenait trois textes absolument identiques, en trois langues différentes ? Peut-être ces textes étaient-ils des adaptations d'un même texte, à des publics différents, et non des traductions. De plus, cette unique référence commune est bien insuffisante pour couvrir l'ensemble des écrits de l'Égypte ancienne. Disons que les égyptologues se sont mis d'accord sur le sens qu'il convient d'attribuer à tel ou tel hiéroglyphe, mais, compte-tenu des faibles informations disponibles, il y a fort à parier que les contre-sens sont nombreux. Bien entendu, les spécialistes n'en conviendront jamais, et nous rétorqueront que ce sont eux les experts, tandis que nous n'avons aucune connaissance en égyptologie. Mais c'est là que le mathématicien joue un rôle : précisément, sans aucune connaissance du sujet en question, il sait que l'information disponible est trop faible pour que les contre-sens puissent être évités.

Pouvez-vous imaginer, en français, une phrase qui serait difficilement traduisible en une langue étrangère, quelle qu'elle soit ? Expliquez pourquoi. Tentez de classer : quels sont les noms, les choses, les idées, qui seront faciles à traduire et quels sont ceux qui le seront moins ?

Pour vous aider, voici un exemple amusant. La phrase "la chair est faible" avait été soumise à une machine à traduire (vers quelle langue, l'histoire ne le dit pas), puis le résultat avait été traduit en sens inverse, avec pour résultat "la viande est molle".

Pour une première modélisation, essayez de travailler seulement sur les mots, et non sur les phrases. Essayez de faire une classification : les mots qui ont certainement un équivalent dans toute autre langue ; les mots qui ont des équivalents proches ; les mots qui ont des équivalents approximatifs. Essayez ensuite de construire un modèle mathématique rendant compte de cela, par exemple au moyen d'une distance sur un ensemble.

### 3. Divergences d'opinion

Dans un pays comme la France, l'information est accessible à tout le monde, la bonne comme la mauvaise. On peut alors s'étonner : comment se fait-il que les gens puissent avoir des opinions politiques différentes ? La société de l'information, dans laquelle nous vivons, devrait avoir pour conséquence la réduction de la disparité des opinions. Or il n'en est rien : les clivages entre partis sont toujours aussi forts.

La raison est, comme pour tous les phénomènes réels, que les êtres humains agissent de manière irrationnelle. Chacun de nous ne lit que ce qui conforte ses propres opinions et n'achète que les journaux qui répondent à ses propres orientations. De même, chacun de nous ne fréquente que les cercles de pensée qui lui conviennent et cherche à éviter les idées qui remettraient en cause les certitudes acquises.

Pouvez-vous, sur une population de taille donnée, construire un modèle mathématique qui rendrait compte de ce comportement ? Il y aurait, par exemple, à l'origine, deux opinions seulement (notées A et B), représentant chacune la moitié de la population. Chaque naissance dans le bloc A est automatiquement d'opinion A, et de même pour B, sauf une petite proportion, qui, avec une certaine probabilité, peut passer à l'opinion opposée. On pourra ainsi étudier, en fonction de la taille des populations concernées et en fonction de la valeur du paramètre, la stabilité des deux groupes.

#### *C. Irrationalité des comportements*

##### 1. Le bus à l'arrêt

Vous marchez tranquillement vers le terminus du bus ; vous savez qu'il part à 9 h, vous êtes en avance et vous prenez tout votre temps. Pourtant, arrivé au dernier carrefour, vous apercevez le bus, qui est effectivement à l'arrêt, et vous pressez le pas. Quelquefois même vous vous mettez à courir. Pouvez-vous justifier ce comportement ?

##### 2. Traverser la rue

Vous voulez traverser la rue, mais le petit pictogramme qui prévient les piétons vient de passer au rouge. Vous attendez quelques instants, vous constatez que les voitures n'ont pas démarré, vous vous dites "j'aurais eu le temps de traverser" et vous vous engagez sur la chaussée. Pouvez-vous justifier ce comportement ?

##### 3. Optimiser ses chances

Vous disposez d'une certaine somme d'argent en liquide, par exemple des billets que vous venez de retirer d'un distributeur automatique. Vous craignez les pickpockets. Allez-vous regrouper tous les billets dans une seule poche, ou les répartir entre plusieurs poches ? Efforcez-vous de faire correctement la liste de tous les avantages et inconvénients de chaque solution. Introduisez des probabilités (même arbitraires) pour les différents événements possibles et expliquez sur quelle base se fonde votre décision.

#### 4. Mettre les couverts sur une table

On est souvent frappé, au restaurant, par la quantité de travail, en apparence inutile, que s'impose le restaurateur : à peine le client installé, il retire les couverts inutilisés, qu'il venait pourtant de mettre. Ne vaudrait-il pas mieux attendre que le client soit installé pour mettre les assiettes et les couverts ? Cela ne ralentirait pas le service, car la préparation de la cuisine prend du temps, et mettre la table pourrait se faire simultanément.

Oui, mais cette logique n'est qu'apparente. Dans l'état actuel des choses, le client, lorsqu'il entre dans un restaurant, s'attend à voir une table complètement dressée ; il jugerait négativement s'il voyait une nappe entièrement vide. Les couverts signifient donc "nous sommes prêts à vous recevoir". Certes, on pourrait, progressivement, expliquer au client que, dorénavant, les tables seront mises à la demande, mais cela requerra du temps et une certaine forme d'éducation de la clientèle.

De manière générale, pour les processus de la vie courante, on ne peut pas se ramener à un simple problème d'optimisation. Il faut savoir prendre en considération les tenants et les aboutissants de chacune des phases et le poids des habitudes.

#### 5. Construire une maison

Regardez une maison neuve, dans un village quelconque, et demandez-vous combien, parmi ses caractéristiques, relèvent d'un processus d'évaluation rationnel : la position sur le terrain ? le nombre de pièces ? la forme générale ? l'aspect des portes et fenêtres ? le type de toit ? la couleur des murs, celle des volets ?

Mais demandez-vous déjà quel pourrait-être ce processus rationnel. Quels sont les éléments à prendre en considération, par exemple lorsqu'on décide de la position sur le terrain ou du plan de la maison ? On s'apercevra qu'il y a un certain nombre de contraintes, notamment réglementaires : distance aux voisins, en particulier. Mais, une fois ces contraintes prises en considération, le choix n'est nullement le résultat d'une optimisation au sens mathématique du mot. Ce qui l'emporte, ce sont les goûts de chacun, au sens le moins discutable du mot (les goûts ne se discutent pas) et les conseils de l'homme de l'art.

Nous voyons ici apparaître une règle très générale : dans un processus de la vie courante, on incorpore de nombreuses contraintes, mais aucune optimisation.

#### *D. Le prix d'un bien, d'une marchandise*

On croit généralement que le prix d'un bien est une notion convenablement définie : après tout, c'est là dessus que reposent les économies de tous les pays. Il n'en est rien.

Voyons si vous êtes capable de trouver une solution au dilemme suivant, inspiré d'une histoire vraie (reproduit de la Lettre de la SCM no 18, juin 2002).

La fabrication de gants revient à un industriel 1 Euro la paire, tout compris. Il dispose de 10 000 paires et cherche à les exporter dans un pays où les droits de douane sont les  $\frac{4}{5}$  du prix de vente. Il ne peut vendre ses gants plus de 5 Euros la paire, compte tenu de la con-

currence et du pouvoir d'achat local. Peut-il réaliser un bénéfice, comment et de combien ? On néglige les frais de transport. On n'a pas le droit de tricher avec la douane : le prix déclaré doit être le prix de vente réel.

Comme nous l'avons dit plus haut, il s'agit d'une histoire vraie ; on n'a pas conservé le nom du commerçant qui a imaginé la solution, tout à fait remarquable. Vous constatez immédiatement que, si vous vous contentez d'une modélisation mathématique bien usuelle, bien claire, bien robuste, il n'y a pas de solution. Et pourtant, il y a une solution : il s'agit d'une histoire vraie. Et cette solution n'a certainement pas été découverte par un mathématicien professionnel, mais bien plutôt par un vieux Juif au fond d'un ghetto, ou par un vieil Arabe au fond d'un souk : des gens qui sont familiers du commerce et de ses arcanes.

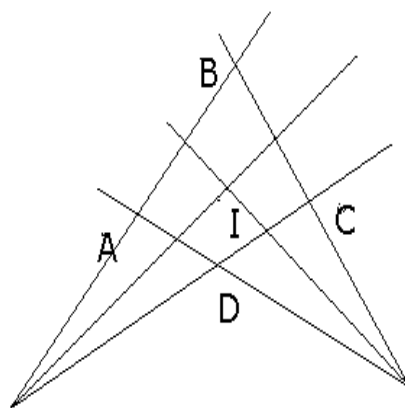
Lorsque nous avons proposé ce défi aux lecteurs de la "Lettre de la SCM", aucun mathématicien professionnel n'a su trouver la solution. Le prix a été gagné par Mlle Anne-Sophie Aubry, alors âgée de 13 ans.

### *E. Erreurs sur les mesures*

Lorsqu'on fait une mesure, on a tendance à se soucier du résultat, sans trop s'occuper des erreurs qui peuvent avoir été commises. Pourtant, bien souvent, l'instrument de mesure est vendu avec un ordre de grandeur de la précision donnée. On vous dira par exemple que ce thermomètre est précis à un degré Celsius près.

Imaginez que vous mesuriez la même température  $X$  avec trois instruments, chacun précis au degré près. Vous lisez  $20^{\circ}\text{C}$ ,  $20,4^{\circ}\text{C}$ ,  $20,7^{\circ}\text{C}$ . Quelle valeur allez-vous attribuer à  $X$  ?

Dans la situation qui suit, vous avez reporté la direction où se trouve un phare, mais dans chaque cas, une erreur angulaire a pu être commise :



Vous avez décidé que le phare était à l'intersection des deux visées centrales (point I), alors qu'il pourrait être n'importe où dans l'intersection des deux cônes (quadrilatère ABCD)

Le cas de deux visées est très commode, parce que les deux droites se coupent en un point et un seul. Comment ferez-vous s'il y a trois visées qui, en général, ne sont pas concourantes ?

Et, revenant au cas de deux visées, vous observerez que le point d'intersection des visées centrales n'est pas le barycentre du quadrilatère défini par l'intersection des deux cônes.

(Cette application est tirée du livre de Bernard Beauzamy : Modèles Mathématiques pour l'étude des phénomènes réels ; ouvrage édité par la SCM).

### *F. Agencer des ressources*

Vous voulez construire une pyramide : vous êtes Pharaon et vous voulez passer à la postérité. Pour plus de solidité, cette pyramide sera à base carrée. Vous disposez d'un nombre illimité de pierres toutes identiques : mettons 1 m de long, pour 0,5 m x 0,5 m de section.

Comment allez-vous disposer ces pierres ?

Dans la pratique, comme on le voit sur cet exemple très simple, le choix du critère à optimiser ne s'impose pas de lui-même : ici, en vérité, il n'existe pas. Il faut essayer de savoir ce que l'on souhaite et réaliser des compromis. Mais sur quelles bases ?