Assignement du spectre de matrices de la forme $A - KH$

par Bernard Beauzamy

Société de Calcul Mathématique SA
111 Faubourg Saint Honoré, 75008 Paris

Mars 1996

Résumé. – Adaptant la méthode de Beauzamy-Enflo [1], nous montrons que pour $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ réels donnés, pour A et H matrices réelles données, on peut en général calculer la matrice réelle K pour que le spectre de $A - KH$ soit précisément $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

`En application du marché ETCA/CREA/95.01.181, Ministère de la Défense, France`

Nous donnons ici une adaptation de la méthode générale d'assignement de spectre (Beauzamy-Enflo [1]) à un cas particulier important en pratique : celui de matrices de la forme $A - KH$.

Toutes les matrices considérées sont à coefficients réels ; A est $n \times n$, H est $p \times n$ (où $p < n$) et K est $n \times p$.

On cherche à déterminer K pour que le spectre de $A - KH$ soit précisément un ensemble donné

$$\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$$

où l'on suppose que :

– les λ_i sont réels, deux à deux distincts,
– aucun d'eux n'est dans le spectre de A.

Cet assignement est possible si et seulement si il existe n vecteurs $x_1, \ldots, x_n$, tous non nuls, tels que

$$(A - KH)x_j \;=\; \lambda_j\, x_j, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Remarque : comme les λ_j sont distincts, les x_j seront nécessairement indépendants.

On réécrit (1) sous la forme :

$$(A - \lambda_j I)x_j \;=\; KHx_j, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Comme λ_j n'est pas valeur propre de A, le résolvant $R(\lambda_j) = (A - \lambda_j I)^{-1}$ existe.

Soit $y_j = (A - \lambda_j I)x_j$. On a $x_j = R(\lambda_j)y_j$, $j = 1, \ldots, n$, et (2) s'écrit :

$$y_j \;=\; KHR(\lambda_j)\, y_j, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Les y_j sont non nuls (car $R(\lambda_j)$ est un isomorphisme) et (3) et (1) sont équivalents.

Remarque : voyons un cas où (3) est impossible.

Prenons $A = I$, $p = 1$, $H = (1, 0, \ldots, 0)$, $K = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$, $KHx = x(1)\,\vec{k}$ où $\vec{k}$ est le vecteur de composantes $(k_1, \ldots, k_n)$ et $x(1)$ représente la première coordonnée de x.

Alors

$$R(\lambda_j)y \;=\; \frac{1}{1 - \lambda_j}\, y.$$

Donc (3) s'écrit :

$$y_j \;=\; \frac{1}{1 - \lambda_j}\, y_j(1)\, \vec{k},$$

où $y_j(1)$ est la première coordonnée de y_j.

On obtient :

$$y_j\, \frac{1 - \lambda_j}{y_j(1)} \;=\; \vec{k}.$$

Le membre de gauche doit dont être indépendant de j. En prenant la première coordonnée, on trouve $1 - \lambda_j$, qui doit donc être indépendant de j, ce qui est impossible puisque les λ_j sont au contraire tous distincts.

Donc si $A = I$, $p = 1$ et $H = (1, 0, \ldots, 0)$, l'assignement est impossible.

Revenons la construction générale.

Supposons que l'on puisse trouver p vecteurs indépendants $y_1, \ldots, y_p$ vérifiant (3). Alors les $x_j = R(\lambda_j)y_j$, $j = 1, \ldots, p$, sont automatiquement indépendants, puisque $KHx_j = y_j$, et les $(Hx_j)_{j=1,\ldots,p}$ sont aussi indépendants. Donc, puisque K opère de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$, l'équation

$$K(Hx_j) \; = \; y_j, \qquad j = 1, \ldots, p, \tag{4}$$

détermine K complètement : il existe un et un seul K de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$, vérifiant (4).

Inversement, étant donnés des points $x_1, \ldots, x_p$, des points indépendants $y_1, \ldots, y_p$, on peut trouver K vérifiant (4) si et seulement si les points $x_1, \ldots, x_p$ sont indépendants dans $\mathbb{R}^n/Ker\,H$ (ce qui veut dire qu'aucune combinaison linéaire de ces points, sauf la combinaison nulle, n'appartient à $Ker\,H$).

Le choix des points $x_1, \ldots, x_p$, $y_1, \ldots, y_p$ est donc arbitraire, sous réserve que les premiers soient indépendants dans $\mathbb{R}^n/Ker\,H$ et les seconds dans $\mathbb{R}^n$.

Nous allons chercher les y_j, $j = p+1, \ldots, n$, sous la forme de combinaisons linéaires des p premiers : ceci est inévitable, car le rang de KH étant p, il ne peut y avoir plus de p vecteurs libres parmi les y_j.

On écrit une décomposition avec des coefficients indéterminés

$$y_j \; = \; \alpha_1^{(j)} \; y_1 + \cdots + \alpha_p^{(j)} \; y_p, \qquad j = p+1, \ldots, n, \tag{5}$$

donc, pour $j = p+1, \ldots, n$,

$$KHR(\lambda_j)y_j \; = \; \alpha_1^{(j)} \; KHR(\lambda_j)y_1 + \cdots + \alpha_p^{(j)} \; KHR(\lambda_j)y_p \, . \tag{6}$$

Dans le membre de gauche de (6), remplaçons $KHR(\lambda_j)y_j$ par y_j et utilisons (5). Nous obtenons :

$$\alpha_1^{(j)} \; y_1 + \cdots + \alpha_p^{(j)} \; y_p \; = \; \alpha_1^{(j)} \; KHR(\lambda_j)y_1 + \cdots + \alpha_p^{(j)} \; KHR(\lambda_j)y_p \tag{7}$$

et remplaçant y_1 par $KHR(\lambda_1)y_1, \ldots, y_p$ par $KHR(\lambda_p)y_p$ dans le membre de gauche, on obtient :

$$\begin{aligned} &\alpha_1^{(j)} \; KHR(\lambda_1) \; y_1 + \cdots + \alpha_p^{(j)} \; KHR(\lambda_p) \; y_p \\ &\quad = \; \alpha_1^{(j)} \; KHR(\lambda_j) \; y_1 + \cdots + \alpha_p^{(j)} \; KHR(\lambda_j) \; y_p, \qquad j = p+1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{8}$$

ou encore

$$\alpha_1^{(j)} \; KH \left(R(\lambda_1) - R(\lambda_j)\right) \; y_1 + \cdots + \alpha_p^{(j)} \; KH \left(R(\lambda_p) - R(\lambda_j)\right) \; y_p \; = \; 0. \tag{9}$$

On utilise l'équation résolvante :

$$R(\lambda) - R(\lambda') \; = \; (\lambda - \lambda') \; R(\lambda)R(\lambda'),$$

et on réécrit (9) sous la forme :

$$\alpha_1^{(j)} \;\; KH(\lambda_1 - \lambda_j) \; R(\lambda_1)R(\lambda_j) \; y_1 + \cdots + \alpha_p^{(j)} \; KH(\lambda_p - \lambda_j) \; R(\lambda_p)R(\lambda_j) \; y_p \; = \; 0$$

ou encore

$$KH(R(\lambda_j) \left(\alpha_1^{(j)} \; (\lambda_1 - \lambda_j) \; R(\lambda_1) \; y_1 + \cdots + \alpha_p^{(j)} \; (\lambda_p - \lambda_j) \; R(\lambda_p) \; y_p\right) \; = \; 0. \tag{10}$$

Les conditions (4) font que K est un isomorphisme sur son image (il transforme une base en une base). Donc (10) est équivalent à :

$$HR(\lambda_j) \left(\alpha_1^{(j)} \; (\lambda_1 - \lambda_j) \; R(\lambda_1) \; y_1 + \cdots + \alpha_p^{(j)} \; (\lambda_p - \lambda_j) \; R(\lambda_p) \; y_p\right) \; = \; 0. \tag{11}$$

Posons

$$\beta_1^{(j)} \; = \; \alpha_1^{(j)} \; (\lambda_1 - \lambda_j), \ldots, \beta_p^{(j)} \; = \; \alpha_p^{(j)} \; (\lambda_p - \lambda_j).$$

Comme les $\lambda_1 - \lambda_j, \ldots, \lambda_p - \lambda_j$ sont tous non nuls, si l'un des $\beta_1^{(j)}, \ldots, \beta_p^{(j)}$ est non-nul, il en sera de même du $\alpha^{(j)}$ correspondant, et le point y_j sera non-nul.

L'équation (11) se réécrit avec ces notations :

$$HR(\lambda_j) \left(\beta_1^{(j)} \; R(\lambda_1) \; y_1 + \cdots + \beta_p^{(j)} \; R(\lambda_p) \; y_p\right) \; = \; 0, \qquad j = p+1, \ldots, n. \tag{12}$$

Nous avons obtenu :

Proposition 1. – *S'il existe* p *vecteurs indépendants* $y_1, \dots, y_p$, *tels que :*

$$R(\lambda_1)y_1, \dots, R(\lambda_p)y_p$$

soient aussi indépendants dans $\mathbb{R}^n/Ker\,H$, *et s'il existe, pour chaque* $j = p+1, \dots, n$, p *coefficients* $\beta_1^{(j)}, \dots, \beta_p^{(j)}$ *non tous nuls, tels que (12) soit satisfait, alors l'assignement du spectre de* $A-KH$ *à l'ensemble* $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ *est possible grâce au* K *déterminé par (4). Ce* K *est unique.*

Nous allons maintenant transformer (12) en propriétés d'intersection de sous-espaces vectoriels.

Soit $N = Ker\,H$ (sous-espace de dimension $n-p$), et soient

$$\begin{aligned} N_j &= Ker\,HR(\lambda_j) = \{z, HR(\lambda_j)z = 0\} \\ &= \{z, R(\lambda_j)z \in N\} = (A - \lambda_j I)N. \end{aligned}$$

Chaque N_j est un sous-espace vectoriel de dimension $n-p$, $j = p+1, \dots, n$.

Soit $E = \text{span}\{R(\lambda_1)y_1, \dots, R(\lambda_p)y_p\}$. La condition (12) signifie simplement :

“L'intersection de E avec chaque N_j n'est pas réduite à 0.”

Nous avons donc obtenu :

Proposition 2. – *Si l'on peut trouver* p *points* $x_1, \dots, x_p$, *indépendants dans* $\mathbb{R}^n/N$, *tels que :*

a) les $(A-\lambda_1 I)x_1, \dots, (A-\lambda_p I)x_p$ *soient aussi indépendants,*

b) $E = \text{span}\ \{x_1, \dots, x_p\}$ *intersecte (non trivialement) les sous-espaces* $N_{p+1}, \dots, N_n$ *(qui sont des sous-espaces fixés, de dimension* $n-p$*), alors l'assignement de* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *est possible. Le* K *correspondant est déterminé par (4), et est unique.*

Remarque. – L'assignement est impossible s'il existe un sous-espace $F \subset N$, stable par A (c'est à dire vérifiant $AF = F$). Ceci rejoint un résultat classique d'automatisme.

Supposons en effet que l'on puisse trouver x_1, …, x_p, indépendants dans $\mathbb{R}^n/N$, tels que l'espace vectoriel span $\{x_1, \dots, x_p\}$ intersecte non trivialement les N_j, $j > p$. Soit G un supplémentaire de F dans N ; on a $N = F \oplus G$, et $\dim G < n-p$. Puisque F est stable par A, il l'est aussi par $A - \lambda_j I$, et comme ce dernier opérateur est un isomorphisme, on obtient

$$(A-\lambda_j I)N = F \oplus (A-\lambda_j I)G\ , \qquad j > p. \tag{13}$$

Notons $G_j = (A-\lambda_j I)G$, $j > p$. On a donc, d'après (13),

$$N_j = F \oplus G_j\ , \qquad j > p.$$

Maintenant, l'hypothèse span $\{x_1, \dots, x_p\}$ intersecte non trivialement les N_j, $j > p$ se traduit par : Pour tout $j > p$, il existe $\beta_1^{(j)}$, …, $\beta_p^{(j)}$ non tous nuls tels que

$$\beta_1^{(j)}x_1 + \cdots + \beta_p^{(j)}x_p \in N_j\ ,$$

d'où

$$\beta_1^{(j)}KHx_1 + \cdots + \beta_p^{(j)}KHx_p \in KHG_j.$$

Mais si $KHx_1 = (A-\lambda_1 I)x_1$, …, $KHx_p = (A-\lambda_p I)x_p$, on en déduit

$$\beta_1^{(j)}(A-\lambda_1 I)x_1 + \cdots + \beta_p^{(j)}(A-\lambda_p I)x_p \in KH(A-\lambda_j)G.$$

Or nous savons que G est inclus dans $N = Ker\,H$, et donc les termes $KH\,\lambda_j\,G$ au second membre valent 0. Il nous reste donc :

$$\beta_1^{(j)}(A-\lambda_1 I)x_1 + \cdots + \beta_p^{(j)}(A-\lambda_p I)x_p \in KHAG.$$

Comme G est de dimension strictement inférieure à $n-p$, il en est de même de $KHAG$. Or il y a $n-p$ valeurs possibles de j, donc $n-p$ points de la forme $\beta_1^{(j)}(A-\lambda_1 I)x_1 + \cdots + \beta_p^{(j)}(A-\lambda_p I)x_p$. Il est donc clair que ces points ne peuvent être indépendants, et donc que les $(A-\lambda_1 I)x_1$, …, $(A-\lambda_p I)x_p$ ne sont pas indépendants.

La condition a) n'est pas une restriction en général : si $x_1, \dots, x_p$ sont indépendants, leurs transformées par les p isomorphismes $(A-\lambda_1 I), \dots, (A-\lambda_p I)$ seront aussi indépendants (mais ceci peut être faux dans des cas particuliers). La condition a) sera omise dans la suite.

Nous traitons maintenant la condition b).

Pour $x \in \mathbb{R}^n$, notons $x=(x',x'')$, où x' désigne les p premières coordonnées, x'' les $n-p$ dernières. Quitte à changer de base, on peut écrire

$$N_j \;=\; \{z \in \mathbb{R}^n, \quad z' = V_j z''\}$$

où V_j est un opérateur de $\mathbb{R}^{n-p}$ dans $\mathbb{R}^p$. Ceci signifie simplement que z est entièrement déterminé par ses $n-p$ dernières coordonnées (puisque N_j est de dimension $n-p$).

On cherche donc p points indépendants $x_1, \dots, x_p$ dans $\mathbb{R}^n/N$, et pour tout $j > p$, des scalaires $\beta_1^{(j)}, \dots, \beta_p^{(j)}$, non tous nuls, tels que :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \beta_1^{(p+1)} x_1' + \cdots + \beta_p^{(p+1)} x_p' & = & V_{p+1} \left(\beta_1^{(p+1)} x_1'' + \cdots + \beta_p^{(p+1)} x_p'' \right) \\ & \vdots & \\ \beta_1^{(n)} x_1' + \cdots + \beta_p^{(n)} x_p' & = & V_n \left(\beta_1^{(n)} x_1'' + \cdots + \beta_p^{(n)} x_p'' \right) \end{array} \right. \tag{14}$$

La première ligne exprime en effet que l'espace vectoriel engendré par $x_1, \dots, x_p$ rencontre N_{p+1} ; il faut que sur chaque ligne l'un au moins des $\beta^{(j)}$ soit non nul.

Il y a $n-p$ équations. Dans la dernière, prenons $\beta_p^{(n)} = 1$, les autres 0. On trouve $x_p' = V_n x_p''$. De même, dans la précédente, on prend $\beta_{p-1}^{(n-1)} = 1$, les autres 0, ce qui donne $x_{p-1}' = V_{n-1} x_{p-1}''$, et ainsi de suite tant que cela est possible.

– Si le nombre d'équations est inférieur ou égal au nombre de variables, c'est à dire si $n-p \le p$, ou $p \ge n/2$, c'est un cas trivial : chaque équation de (14) se réduit à $x_{p-j}' = V_{n-j}\, x_{p-j}''$, ou $x_l' = V_{n-p+l}\, x_l''$, $l = 1, \dots, p$. Il suffit de choisir les $x_1'', \dots, x_p''$ arbitraires dans $\mathbb{R}^{n-p}$ et de calculer les $x_1', \dots, x_l'$ par les équations

$$x_l' \;=\; V_{n-p+l}\; x_l'' \; . \tag{15}$$

Les $x_l = (x_l', x_l'')$ seront en général automatiquement indépendants dans $\mathbb{R}^n/N$.

Par exemple, si $n-p=1$, $p=n-1$, il n'y aura qu'une seule équation, qui sera

$$\beta_1^{(n)} x_1' + \cdots + \beta_{n-1}^{(n)} x_{n-1}' \;=\; V_n \left(\beta_1^{(n)} x_1'' + \cdots + \beta_{n-1}^{(n)} x_{n-1}'' \right) .$$

Nous prendrons $x_{n-1}' = V_n x_{n-1}''$, et les $x_1, \dots, x_{n-2}$ seront arbitraires.

– Si par contre $p < n/2$, on se sert des p dernières équations (14) pour calculer x' en fonction de x'' :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_p' & = & V_n\; x_p'' \\ x_{p-1}' & = & V_{n-1}\; x_{p-1}'' \\ & \vdots & \\ x_1' & = & V_{n-p+1}\; x_1'' \end{array} \right. \tag{16}$$

et ceci utilise p équations. Comme nous avons $n-p$ équations, avec $n-p > p$, il en reste $n-2p$, dans lesquelles on substitue $x_1', \dots, x_p'$ donnés par (16). On trouve :

$$\begin{cases} \beta_1^{(p+1)}\ V_{n-p+1}\ x_1'' + \cdots + \beta_p^{(p+1)}\ V_n\ x_p'' & = & V_{p+1}\left(\beta_1^{(p+1)} x_1'' + \cdots + \beta_p^{(p+1)}\ x_p''\right) \\ & \vdots & \\ \beta_1^{(n-p)}\ V_{n-p+1}\ x_1'' + \cdots + \beta_p^{(n-p)}\ V_n\ x_p'' & = & V_{n-p}\left(\beta_1^{(n-p)} x_1'' + \cdots + \beta_p^{(n-p)} x_p''\right) \end{cases} \tag{17}$$

Ceci se réécrit, avec $W_{ij} = V_{p+j} - V_{n-p+i}\,,\ u_j = x_j''\,,$

$$\begin{cases} \beta_1^{(p+1)}\ W_{p+1,1}\ u_1 + \cdots + \beta_p^{(p+1)}\ W_{p+1,p}\ u_p & = & 0 \\ & \vdots & \\ \beta_1^{(n-p)} W_{n-p,1}\ u_1 + \cdots + \beta_p^{(n-p)}\ W_{n-p,p}\ u_p & = & 0, \end{cases} \tag{18}$$

où les $u_j \in \mathbb{R}^{n-p}$, les W_{ij} opèrent de $\mathbb{R}^{n-p}$ dans $\mathbb{R}^p$, et nous avons $n-2p$ équations.

Fixons $u_1, \ldots, u_{p-1}$, indépendants dans $\mathbb{R}^{n-p}$, arbitraires. Montrons qu'il existe un choix de u_p satisfaisant (18).

Considérons

$$f(u) = \Big(\det\,(W_{p+1,1}\,u_1, \ldots, W_{p+1,p-1}\,u_{p-1}, W_{p+1,p}\,u), \ldots$$
$$\ldots, \det\,(W_{n-p,1}\,u_1, \ldots, W_{n-p,p-1}\,u_{p-1}, W_{n-p,p}\,u)\Big).$$

Ceci est une fonction de $u \in \mathbb{R}^{n-p}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^{n-2p}$, et $n-2p < n-p$. Par ailleurs $f(-u) = -f(u)$ (chaque déterminant est celui de p vecteurs dans $\mathbb{R}^p$).

D'après le théorème antipodal de Borsuk, il existe un u, $\|u\| = 1$, dans $\mathbb{R}^{n-p}$, tel que $f(u) = 0$.

Donc, pour cet u, tous les déterminants sont nuls, et les

$$(W_{p+1,1}\,u_1, \ldots, W_{p+1,p-1}\,u_{p-1}, W_{p+1,p}\,u)$$

sont liés, de même les

$$(W_{n-p,1}\,u_1, \ldots, W_{n-p,p-1}\,u_{p-1}, W_{n-p,p}\,u)$$

sont liés : les équations (18) sont satisfaites.

Les $u_1 = x_1'', \ldots, u_p = x_p''$ étant ainsi choisis (les $p-1$ premiers arbitraires, le p-ème grâce au théorème de Borsuk), les $x_1, \ldots, x_p$ associés sont automatiquement indépendants en général dans $\mathbb{R}^n/N$.

Nous avons obtenu :

Théorème. – *L'assignement du spectre $A - KH$ à un n-uple réel $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ est possible en général, grâce à une matrice K à coefficients réels, convenablement choisie.*

Références

[1] B. Beauzamy – P. Enflo : Eigenvalue assignement connected with output feedback. A paraître.