Analyse quantitative et Calcul Mathématique Assisté par Ordinateur

Un programme de recherche mené par l'Institut de Calcul Mathématique,
en collaboration avec :

– Enrico Bombieri (Médaille Fields), Professeur à l'*Institute for Advanced Study*, Princeton,

–Per Enflo (Médaille d'or, Swedish Royal Society) et Paul Wang, Professeurs à l'Université de Kent (Ohio),

– Don Burkholder (Membre de la National Academy of Sciences, U.S.A.) et Bruce Reznick, Professeurs à l'Université d'Illinois à Urbana-Champaign.

Ce programme est actif depuis cinq ans et a fait l'objet des contrats suivants :

– Délégation Générale à l'Armement, Direction des Recherches, Etudes et Techniques : contrat no 89/1377 (1989-91), Ministère de la Défense,

– Délégation Générale à l'Armement, Etablissement Technique Central de l'Armement : contrats no 20351/90, 20357/91, 20367/91, 20367-01/91, 20388/92, 20432/93, Ministère de la Défense,

– *Digital Equipment Corp.*, contrat EERP-FR22.

Il a été sélectionné par le C.N.R.S. et la *National Science Foundation* (U.S.A.), au titre des programmes de coopération France - U.S.A. (1990-93). Il est soutenu aux U.S.A. par la *National Science Foundation* (grant 440272), et vient d'être retenu par l'OTAN au titre des programmes scientifiques de l'OTAN (CRG 930760).

Il se situe à l'"interface" entre mathématiques et informatique et peut être complété au moyen d'autres thèmes de recherche, tels le "Calcul Scientifique", qui concerne les ingénieurs.

mise à jour : avril 1994

Description scientifique abrégée du sujet.

Dans de nombreux domaines de la recherche scientifique et technique, le progrès concret, au quotidien, passe d'abord par une amélioration du modèle mathématique de base : il ne suffit pas que les ordinateurs tournent plus vite, il faut aussi réfléchir à la bonne façon de les employer. C'est le cas en particulier pour des domaines aussi fondamentaux (fondamentaux pour l'économie) que le traitement du signal (séismologie, recherche pétrolifère, acoustique sous-marine), le contrôle des systèmes (robotique, automatique), la mécanique (système chaotiques, mécanique quantique).

Dans tous ces domaines, la difficulté provient du fait que le modèle mathématique n'est pas simple ; en particulier il n'est pas linéaire (ceci veut dire que quand la cause est multipliée par deux, l'effet n'est pas multiplié par deux).

L'objet mathématique de base, dans presque tous les cas, est le polynôme, à coefficients réels ou complexes, en une ou plusieurs variables (et il y aura d'autant plus de variables que le modèle sera plus compliqué – que l'on pense aux modèles d'économie). La raison est que toute fonction (raisonnablement continue) peut être approchée par des polynômes ; on écrit les équations qui gouvernent le système (en général des équations différentielles), on approxime les solutions par des polynômes, et on se retrouve devant une ou plusieurs équations de type polynomial.

Les polynômes sont donc des objets de base en mathématiques ; mais, de manière étonnante, les estimations qui les concernent sont purement qualitatives (p. ex. l'identité de Bezout) ou dépendent du degré (l'inégalité de Bernstein en Analyse Harmonique, le théorème de Gelfond en Théorie des Nombres).

Ceci est tout à fait insatisfaisant, pour deux raisons pratiques :

La première est que des estimations précises sont souvent nécessaires, en particulier pour les calculs numériques (et précisément lorsque le degré est élevé).

La seconde est que certaines données ne dépendent pas réellement du degré. On peut se demander, par exemple, combien un polynôme a de racines dans le disque de centre 0 et de rayon $1/2$. Une réponse évidente est : au plus son degré, mais cette réponse est sans intérêt. La réponse correcte -et utile- est que cela dépend du poids des termes de bas degré au sein du polynôme.

Le thème général de notre programme est de fabriquer de nouveaux instruments de mesure pour les polynômes, de manière à obtenir des estimations quantitatives là où des renseignements qualitatifs étaient seuls connus, ou à améliorer les estimations quantitatives lorsqu'elles existaient déjà.

Deux outils jouent un rôle essentiel : le concept de "concentration aux bas degrés" (Beauzamy-Enflo, 1985) et la "norme de Bombieri" (Bombieri, 1990). Les résultats obtenus (voir description détaillée) concernent la taille des coefficients, la répartition des racines, la factorisation. Nous avons déduit de nos résultats théoriques des algorithmes de factorisation (pour les polynômes à coefficients entiers) qui sont actuellement utilisés par le logiciel de Calcul Symbolique *Mathematica.* La factorisation des polynômes est un outil essentiel en mécanique.

La norme de Bombieri a donné naissance à une nouvelle représentation des polynômes homogènes en plusieurs variables, sous forme d'hypercube. Cette représentation (outre son intérêt théorique fondamental) est la clef du calcul massivement parallèle pour les polynômes en très nombreuses variables. Les algorithmes que nous avons réalisés à la demande du Ministère de la Défense "tournent" sur *Connection Machine* CM2, CM200 et CM5. L'utilisation des machines massivement parallèles pour les polynômes à très grand nombre de variables est évidemment une nécessité, les ordinateurs séquentiels étant alors peu efficaces. Mais cette utilisation posait des problèmes conceptuels, que nous avons résolus.

Description technique

1. Concentration aux bas degrés et applications.

La notion de *concentration aux bas degrés* pour un polynôme a été introduite par Bernard Beauzamy et Per Enflo en 1985. Elle permet d'obtenir, avec un concept unique, des résultats quantitatifs dans plusieurs domaines des mathématiques, et gouverne divers phénomènes en apparence sans rapport entre eux, tels la répartition des zéros, et la taille du polynôme dans un intervalle donné. De plus, les estimations obtenues sont *indépendantes du degré*.

Pour les polynômes en une variable, la définition est :

Soit $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_k z^k + \cdots + a_n z^n$ un polynôme à coefficients complexes. Soit d, $0 < d \leq 1$, et soit $k \in \mathbb{N}$. Nous dirons que P a *concentration* d *au degré* k (mesurée en norme l_1) si :

$$\sum_{j=0}^{k} |a_j| \ \geq \ d \sum_{j=0}^{n} |a_j|. \tag{1}$$

Si la concentration est définie en norme l_2, la définition devient

$$(\sum_{0}^{k} |a_j|^2)^{1/2} \ \geq \ d(\sum_{0}^{n} |a_j|^2)^{1/2}. \tag{2}$$

Sous des hypothèses de ce type, on obtient diverses estimations sur l'inégalité de Jensen ([6], [11]), et sur le nombre de zéros d'une fonction analytique dans un disque.

Par exemple, si une fonction f de H^2 vérifie (2), le nombre de ses zéros dans un disque de centre O et de rayon r peut être majoré par un nombre ne dépendant que de d, k, r ([7]).

Sur ces questions, les résultats que nous obtenons ne sont pas optimaux, et les phénomènes correspondants ne sont pas bien compris.

2. La norme de Bombieri.

Le second outil est la norme introduite par Bombieri dans Beauzamy- Bombieri-Enflo-Montgomery [13].

Pour un polynôme en une variable, $P = \sum_0^n a_j z^j$, cette norme est définie par

$$[P] \ = \ (\sum_{0}^{n} \frac{|a_j|^2}{\binom{n}{j}})^{1/2}. \tag{3}$$

et pour des polynômes homogènes en plusieurs variables, $P = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \, x_1^{\alpha_1} \cdots x_N^{\alpha_N}$:

$$[P] \ = \ (\sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha|^2 \, \frac{\alpha!}{m!})^{1/2}. \tag{4}$$

Elle est directement reliée à la représentation du polynôme comme "objet dans l'espace", sous la forme d'un hypercube (dont la dimension est égale au degré, et l'index de division est égal au nombre de variables). Elle donne des résultats optimaux sur les produits de polynômes (à la différence de ce qui se passait avec le concept de concentration). Précisément, l'inégalité de Bombieri s'écrit :

$$[PQ] \ \geq \ \sqrt{\frac{m!n!}{(m+n)!}}[P] \ [Q], \tag{5}$$

si P, Q sont des polynômes homogènes de degré m, n respectivement. Une description générale des paires extrémales (paires dont le produit est ou bien maximal ou bien minimal) a été donnée récemment par Bruce Reznick [28] et Beauzamy-Frot-Millour [17]. L'application au calcul de la norme d'un opérateur différentiel $P(D)$ n'a pas encore été réalisée, mais devra l'être, du fait de son importance dans l'étude des Equations aux Dérivées Partielles.

Plus généralement, la norme de Bombieri et la représentation d'un polynôme sur hypercube donnent un point de vue complètement neuf sur la théorie des polynômes. Cette norme est, d'une certaine façon, de la même nature que le concept de "concentration aux bas degrés", parce qu'elle utilise des poids sur les différents coefficients, et que ces poids dépendent de la place du coefficient dans le polynôme (on pourrait l'appeler "concentration bilatérale", car les poids sont symétriques). Mais c'est un outil plus précis, et de ce fait nous avons pour projet de reprendre l'étude des questions classiques sur les polynômes à la lumière de ce nouveau concept. Par exemple, des versions fines de l'inégalité de Jensen, de meilleures estimations sur la répartition des zéros, des inégalités précises sur la norme d'un opérateur différentiel, devraient pouvoir être obtenues.

Publications des membres de l'équipe

(Nous ne donnons que la liste des publications de nos équipes, depuis 1989. Les nombreuses contributions faites sur ce sujet par d'autres mathématiciens ne sont pas mentionnées ici.)

[1] Aron, Richard – Beauzamy, Bernard – Enflo, Per : Polynomials with many variables : Real vs Complex Norms. *Journal of Approximation Theory*, vol. 74, 2, 1993, pp. 181–198.

[2] Bacquet, Géraldine : Produits de polynômes en plusieurs variables : expression du reste dans une inégalité de Bombieri. *Note C.R.A.S.*, Paris, octobre 1993.

[3] Beaucoup, Franck : Minimizing norms of polynomials under constraints on the repartition of the zeros. A paraître in the *Illinois J. of Maths.*

[4] Beaucoup, Franck : Estimations quantitatives sur les polynômes liées à la répartition des racines. Thèse de Doctorat. Université Lyon I. Février 1994.

[5] Beaucoup, Franck – Souchon, Catherine : Bombieri's norm and univariate polynomial derivation. *A paraître.*

[6] Beauzamy, Bernard : A minimization problem connected with generalized Jensen's Inequality. *Journal of Math. Anal. and Applications*, vol. 145, 1, jan. 1990, pp. 137–144.

[7] Beauzamy, Bernard : Estimates for H^2 functions with concentration at low degrees and applications to complex symbolic computation. *Journal für die Reine und Angewandte Math.*, vol. 433, 1992, pp. 1–44.

[8] Beauzamy, Bernard : Polynomials with complex coefficients : size of the factors, repartition of the zeros. *Applicable Analysis*. Vol. 41, 1991, pp. 193-201.

[9] Beauzamy, Bernard : Products of polynomials and a priori estimates for coefficients in polynomial decompositions : a sharp result. *Journ. of Symbolic Computation*, 13, 1992, pp. 463–472.

[10] Beauzamy, Bernard : On the leading coefficients of real many-variable polynomials. A paraître au *Journal of Approximation Theory*.

[11] Beauzamy, Bernard : Generalized Jensen's Inequality : a sharper version. A paraître au *Illinois Journal of Maths.*

[12] Beauzamy, Bernard : Finding the roots of polynomial equations : an algorithm with linear command. *A paraître.*

[13] Beauzamy, Bernard – Bombieri, Enrico – Enflo, Per – Montgomery, Hugh : Products of polynomials in many variables. *Journal of Number Theory*, vol. 36, 2, oct. 1990, pp. 219–245.

[14] Beauzamy, Bernard – Chou, Sylvia : On the zeros of polynomials with concentration at low degrees, II. *Journal of Math. Anal. and Applications*, Vol. 175, No 2, 1993, pp. 360-379.

[15] Beauzamy, Bernard – Dégot Jérôme : Differential Identities. *A paraître.*

[16] Beauzamy, Bernard – Frot, Jean-Louis – Millour, Christian : Massively parallel computations on many-variable polynomials : When seconds count. Special volume "Maths and Computer Science", *Annals of*

Maths and IA, M. Nivat and S. Grigorieff, editors.

[17] Beauzamy, Bernard – Frot, Jean-Louis – Millour, Christian : Massively parallel computations on many-variable polynomials, II : The extremal pairs. *A paraître.*

[18] Beauzamy, Bernard – Trevisan, Vilmar – Wang, Paul : Polynomial factorizations : Sharp bounds, efficient algorithms. *Journal of Symbolic Computation*, vol. 15, 1993, pp. 393–413.

[19] Chou, Sylvia : On the roots of polynomials with concentration at low degrees. *Journal of Math. Analysis and Applications*, vol. 149, 2, July 1, 1990, pp. 424–436.

[20] Chou, Sylvia : Séries de Taylor et concentration aux bas degrés. *Thèse*, Université de Paris VII, 1990.

[21] Dégot, Jérôme : Massively parallel computation of many-variable polynomial interpolation. *A paraître.*

[22] Dégot, Jérôme. – Hohl, Jean-Christophe. – Jenvrin-Sesbouë, Odile : Calcul numérique de la mesure de Mahler d'un polynôme par itérations de Graeffe. *A paraître.*

[23] Frot, Jean-Louis – Millour, Christian : Rank of a polynomial and extremality. *A paraître.*

[24] Girardi, Maria : Bounding zeros of H^2 functions by concentrations. A paraître au *Journal of Mathematical Analysis and Applications.*

[25] Hohl, Jean-Christophe : Massively parallel factorizations of polynomials with many non-commuting variables. *A paraître.*

[26] Hohl, Jean-Christophe : Searching for linear factors for a polynomial of degree m with N variables. *A paraître.*

[27] Lacruz, Miguel : Ph.D. Thesis, Kent State University, 1991.

[28] Reznick, Bruce : An Inequality for products of polynomials. *Proceedings A.M.S.*, april 1993, vol. 117, 4, pp. 1063–1073.

[29] Reznick, Bruce : Sums of even powers of real linear forms. *Memoirs of the A.M.S.*, March 1992, vol.96, number 463.

[30] Rigler, A. – Trimble, R.S. – Varga, R. : Sharp lower bounds for a generalized Jensen's Inequality. *Rocky Mountain Journal of Maths*, 19, 1989, pp. 353–373.

[31] Trevisan, Vilmar : Recognition of Hurwitz polynomials. *SIGSAM Bulletin*, vol. 24, 4, oct. 1990.

[32] Trevisan, Vilmar : Computing a sharp bound for the coefficients in polynomial factorizations. *A paraître.*

[33] Trevisan, Vilmar – Wang, Paul. : Practical factorization of univariate polynomials over finite fields. *Proceedings of the ISAAC'91*, Bonn, July 1991.

[34] Varga, Richard : On a generalization of Mahler's Inequality. A paraître in *Analysis.*