



## Le rôle du mathématicien

par Bernard Beauzamy

Journées M2Real, mars 2009

### 1. Critique des mathématiques axiomatiques

Dans son livre de 1940, *A Mathematician's Apology*, G. H. Hardy clame que "le rôle du mathématicien est de démontrer des théorèmes", et ceci est devenu un dogme depuis cette date. Cependant, quelque respect que j'aie pour les théorèmes démontrés par Hardy, je crois cette affirmation totalement erronée, et pis : malsaine.

On ne peut démontrer des théorèmes, en effet, que dans un cadre axiomatique : il faut un cadre bien défini pour établir quoi que ce soit. Le développement des mathématiques, depuis la Seconde Guerre Mondiale, s'est fait presque exclusivement dans le sens de l'axiomatisation ; le groupe Bourbaki en est évidemment le couronnement. Je ne parle ici, bien sûr, que des mathématiques dites "fondamentales" et non de l'analyse numérique.

Mais un cadre bien défini vous coupe de la réalité, qui n'est jamais bien définie. Pis même, ce cadre devient une sorte de forteresse dans laquelle la pensée se réfugie ; la pensée n'a plus envie d'aller voir ailleurs ; elle se sent bien au chaud dans ses fortifications. Il y a donc un double effet pervers : on abandonne la curiosité à l'égard du monde réel, et on y substitue, consciemment ou non, un univers abstrait et factice, que l'on considère comme la réalité, et où l'on va développer une virtuosité technique artificielle.

Si l'on regarde les développements des mathématiques au cours des 60 dernières années, dans les domaines que je connais (analyse fonctionnelle, théorie des opérateurs), on constate qu'ils sont uniquement académiques. Nous avons laissé passer des opportunités très intéressantes de liens avec le monde réel ; par exemple la théorie des ondelettes, qui aurait pu avoir un contenu pratique important, a été ramenée par les mathématiciens à un contenu exclusivement académique, à base de théorèmes. Les développements pratiques ont été faits sans nous. C'est encore pire, me semble-t-il, pour les domaines comme la géométrie algébrique, qui s'éloigne encore plus de la réalité. On a récemment fêté le 80<sup>ème</sup> anniversaire d'Alexandre Grothendieck ; personne n'osera s'interroger sur la valeur scientifique de son œuvre : est-ce autre chose que de l'art abstrait ?

Les mathématiques sont une trop belle science pour être laissée aux universitaires, et il est temps de rendre à notre discipline son pouvoir prédictif. Comme disait Von Neumann, ceci ne peut se faire qu'en y réinjectant de l'empirisme, et donc en abandonnant les champs clos des cadres axiomatiques (voir l'article "Empirisme et dégénérescence en mathématiques", par John Von Neumann, sur notre site web : <http://scmsa.eu/archives/vonneuma.htm>).

J'assistais une fois à un exposé de biologie et un mathématicien présent dans la salle a demandé "comment définissez-vous une cellule ?". Personne ne peut définir une cellule, mais elle existe dans la nature et elle n'a pas besoin d'être définie pour exister.

## 2. Les lois de la nature

Pour comprendre le rôle du mathématicien, commençons par écouter Victor Hugo (*Les Misérables*, 'L'idylle rue Plumet...') :

*Dieu livre aux hommes ses volontés visibles dans les événements, texte obscur écrit dans une langue mystérieuse. Les hommes en font sur le champ des traductions ; traductions hâtives, incorrectes, pleines de fautes, de lacunes et de contre-sens. Bien peu d'esprits comprennent la langue divine. Les plus sagaces, les plus calmes, les plus profonds, déchiffrent lentement, et quand ils arrivent avec leur texte, la besogne est faite depuis longtemps ; il y a déjà vingt traductions sur la place publique. De chaque traduction naît un parti, et de chaque contre-sens une faction ; et chaque parti croit avoir le seul vrai texte, et chaque faction croit posséder la lumière.*

Le mathématicien est précisément là pour tenter de comprendre les lois de la nature : il faut pour cela un langage quantitatif. Ce langage est constitué de tout l'arsenal lentement développé depuis des millénaires : fonctions, calcul différentiel, équations aux dérivées partielles, probabilités, processus stochastiques, etc.

Le physicien, le chimiste, l'ingénieur, réalisent les expériences, recueillent les données, font une première ébauche de lois, qui sont ensuite critiquées et affinées. Les équations de Maxwell, de Navier-Stokes, la conservation de l'énergie, etc. : toutes ces lois ont été découvertes par des physiciens, des chimistes, des ingénieurs.

Mais, ensuite, il faut résoudre les problèmes que posent ces équations, et c'est là que le mathématicien intervient : le satellite que nous lançons va-t-il retomber ? quelle quantité de produit chimique faut-il pour assurer la résistance du composé ? comment évoluera la démographie de telle population ? ce sont maintenant des problèmes de mathématiques.

Le mathématicien a également un devoir de critique et de vigilance à l'égard des solutions qui lui sont soumises :

Le mathématicien ne sait rien sur rien ; ses connaissances, faibles en physique et chimie, sont infimes en sciences du vivant et de la Terre. Il contemple sans a priori et sans passion les sujets de société qu'on lui soumet et sur lesquels il voit avec surprise s'exalter les foules et les médias.

Forgé par six mille ans de rude discipline intellectuelle, il juge la validité des raisonnements et la pertinence des conclusions. Son royaume est celui de la logique. Il sait – cela fait des millénaires qu'il s'y essaie – que les secrets de la Nature ne se laissent pas aisément percer ; on ne sait pas résoudre les problèmes et on ne sait même pas les poser. Lorsque des blancs-becs pensent, en quelques années, avoir découvert quelque loi, avec deux douzaines de mesures, il sourit.

Insensible aux pressions, aux modes, aux accommodements, il voit avec étonnement, et même avec scepticisme « les experts s'accorder » sur un sujet quelconque. Si un raisonnement est correct, il s'impose à tous. Si les experts s'accordent, c'est que quelque chose pose problème.

Bien des disciplines se sont construites sans mathématiques, et bien des disciplines se sont effondrées ; toute science repose sur des mesures et sur des raisonnements. Lorsqu'un raisonnement est incomplet, faux, le mathématicien le dit, seul, tranquille, presque à voix basse.

Et c'est en vain, alors, que les colloques les plus huppés, les titres académiques les plus prestigieux, les publications les plus renommées, appuyées sur les ordinateurs les plus puissants, porteront aux nues le consensus le mieux établi, repris par tous les journaux et clamé par tous les peuples. Tout cela n'a pas plus de valeur que de grossières figures tracées sur le sable par une tribu de sauvages implorant ses idoles pour faire venir la pluie.

Je ne crois pas qu'il y ait, contrairement à ce que dit l'affiche de cette conférence, "des implications bien réelles des avancées mathématiques dans le monde industriel et dans notre quotidien." Ou, si ces avancées existent, elles m'ont échappé. Peut-être fait-on allusion aux modèles mathématiques sophistiqués, utilisés par des banques, et qui ont causé la faillite de nombre d'entre elles, les autres n'ayant été sauvées que par l'argent de ceux qui ne faisaient pas de mathématiques ?

Dans nombre de situations, en effet, je vois proposer des modèles mathématiques sophistiqués, en économie, en planification, en gestion des ressources ; mais ces modèles reposent sur des axiomes sans aucune réalité : un espace vectoriel de biens, qui n'existe pas, une fonction d'utilité, chère aux économistes, mais que personne ne sait calculer, etc.

Je vois bien aussi, les développements de la cryptographie, mais ce n'est qu'un jeu : "devinez-moi un nombre premier". Cela ne décrit aucune réalité physique.

En vérité, je serais incapable de trouver un seul exemple, sur les 60 dernières années, de progrès en physique, en chimie, dans les process industriels ou dans l'organisation de nos sociétés, qui soit dû à un progrès récent en mathématiques. Si de tels exemples existaient, je serais ravi de les utiliser : je vends des mathématiques au quotidien.

Je vois par contre d'innombrables exemples où nous ne parvenons pas à modéliser correctement les processus. En d'autres termes, la société que je dirige, et dont le rôle est de créer des modèles mathématiques, est en concurrence constante avec des savoir-faire empiriques et nous n'avons pas souvent le dessus ! Et lorsque nous l'avons, ce qui arrive tout de même de temps en temps, c'est grâce à des lois bien anciennes, bien établies, déjà connues des Grecs.

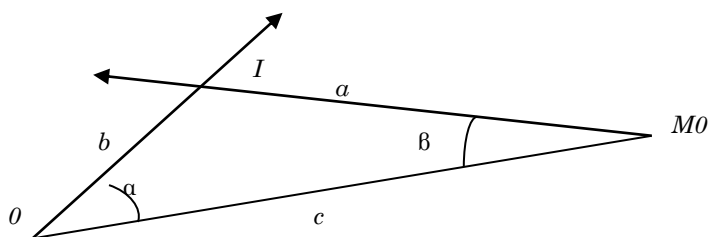
Je vais prendre un exemple. Nous sommes, dans le cadre d'un contrat avec le Ministère de la Défense, Délégation Générale pour l'Armement, responsables de la faisabilité d'un système appelé "Bouclier Naval" : il s'agit de détecter, au moyen d'un radar approprié, un missile qui se dirigerait vers un navire, et d'interposer un gros objet gonflable entre le missile et le navire. La difficulté tient au laps de temps très court dont on dispose pour envoyer et gonfler le ballon : moins d'une demi-seconde.

On pourrait donc s'attendre, sur une situation aussi critique et sophistiquée, à ce que nous utilisions des mathématiques ultra-sophistiquées ; un mouvement Brownien n-dimensionnel, ou bien quelque idée grandiose dérivée de la géométrie algébrique non-commutative.

Eh bien, rien de tout cela. Le cœur de notre méthode est la formule :

$$\cos(\beta) = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$$

obtenue par la résolution du triangle :



et cette formule était déjà connue des Grecs.

La raison de cette incapacité des modèles sophistiqués à traiter des situations réelles tient aux incertitudes dans la vie réelle : il est relativement facile de construire un modèle, si toutes les données sont présentes, si toutes les lois sont connues, si tous les objectifs sont définis. Mais dans la vie réelle rien de tout cela n'est présent, et c'est pourquoi le savoir-faire empirique, beaucoup plus robuste que nos modèles, l'emporte souvent.

Je ne crois pas non plus qu'il soit nécessaire de se doter de "nouveaux outils de gestion des incertitudes". Ceux dont on dispose, à savoir la théorie usuelle des probabilités, se révèlent largement suffisants. Encore faut-il les maîtriser.

Je suis donc, professionnellement parlant, assez sceptique quant à la valeur ajoutée du mathématicien lorsqu'il s'agit de créer des modèles. Nous donnons trop souvent une impression d'arrogance : nous essayons d'expliquer à des professions qui exercent depuis des centaines d'années comment elles devraient s'y prendre, et en général cela tourne au ridicule. Mais bien sûr il ne faut pas désespérer : il ne faut pas renoncer à la création de modèles ; il faut simplement s'y prendre autrement, viser la robustesse et non la définition axiomatique.

### 3. Le rôle du mathématicien dans la logique

Un point sur lequel le mathématicien a une valeur ajoutée plus immédiate concerne la logique : nous sommes là pour faire observer qu'une faute est commise.

Si je presse un homme politique d'adopter une loi en faveur de la natalité, en lui disant : "Monsieur, ceci est urgent, il y a actuellement 1 500 morts par jour en France", je commets assurément une faute de logique, bien que le fait soit exact. Le chiffre de la population ne dépend pas, en effet, seulement des décès mais aussi des naissances, ainsi bien sûr que de l'immigration et émigration.

Cette même faute de logique est commise très fréquemment à l'heure actuelle. Voyons-en deux exemples frappants.

*La biodiversité.* - On nous dit : trois cents espèces ont disparu en 50 ans. Peut-être ; je ne conteste pas le chiffre ; il pourrait être 3 000 ou 30 000 que je ne le contesterai pas davantage. Mais je dis que juger de la variation de la biodiversité à partir de ce seul chiffre constitue une faute de logique : il faudrait savoir combien d'espèces sont apparues pendant cette même période, et ce chiffre-là est toujours absent des argumentaires.

On nous dit aussi : "c'est la faute de l'homme si les espèces disparaissent". Peut-être ; je ne conteste pas le fait. Mais pour l'établir, il faudrait savoir combien d'espèces disparaissaient déjà avant la civilisation industrielle ; ce chiffre-là n'est jamais mentionné et nous sommes en présence d'une faute de logique.

*Le niveau des océans.* - On nous dit : le niveau des mers monte. Ici, on dispose de chiffres relativement complets, du fait des satellites qui survolent les océans. On constate que, à certains endroits, le niveau monte et qu'à d'autres il descend. Mais c'est le niveau par rapport au satellite qui est mesuré, bien sûr, d'où la faute de logique : il est très possible que, localement, la terre monte ou s'enfonce ; le globe terrestre n'est pas un solide indéformable. Par ailleurs, imputer ces variations à l'espèce humaine repose sur la faute de logique déjà vue : il faudrait les connaître par le passé pour faire une comparaison valide.

Ces fautes de logique reposent sur un postulat, assez universellement accepté, mais faux tout de même : la plupart des gens pensent (consciemment ou non) que les phénomènes naturels sont constants, uniformes, en équilibre. Ils se disent que la nature fait bien les choses, et que si elle est bouleversée, d'une façon ou d'une autre, c'est la faute de l'homme. Ils pensent que les espèces ont toujours été là, que le globe est stable et rigide, etc.

Or ce postulat d'uniformité et d'équilibre est absolument faux. La Nature, dans chaque situation, réalise des oscillations, très lentes, dont l'amplitude va croissant. Elle ne tend jamais vers un équilibre, mais crée des déséquilibres qui alternent. Il est très facile de construire des modèles mathématiques qui illustrent ceci, mais voyons-le plutôt sur des exemples concrets :

Des espèces se partagent un territoire : il est faux qu'elles parviendront à un équilibre. En réalité, certaines des espèces deviendront dominantes tour à tour. Il en est de même des civilisations, comme le montre notre histoire.

Des partis politiques se partagent les suffrages des électeurs ; chacun a un taux de dissidents (électeurs qui passent à un autre parti). Les seules lois du hasard font que chaque parti, à un moment ou à un autre, deviendra majoritaire.

Le climat est instable, aussi bien localement que globalement. Les seules lois du hasard suffisent à assurer que, en chaque endroit du globe, il y aura des phases de refroidissement et des phases de réchauffement.

Ne pas tenir compte de cette variabilité des phénomènes constitue une faute de logique. Par exemple, on nous dit : des analyses de carottes prises dans les glaces permettent de reconstituer la teneur de l'atmosphère en CO<sub>2</sub> il y a 300 000 ans. Ceci est une faute de logique : la teneur en CO<sub>2</sub> varie constamment, d'un lieu à l'autre et d'une heure à l'autre, tout comme la température, et des mesures prises au pôle ne préjugent en rien de la concentration ailleurs, tout comme la température au pôle ne caractérise en rien la température ailleurs.

Je ne crois pas non plus - contredisant une nouvelle fois l'affiche de la conférence - que le monde soit de plus en plus complexe et incertain. Géologiquement comme socialement, bien au contraire, il est plus calme qu'il ne l'a jamais été. Mais il se trouve que, brutalement, l'homme s'est mis à avoir peur (d'où le "principe de précaution") et qu'il a vu des dangers partout. Cela ne signifie pas qu'ils n'existaient pas auparavant : simplement, on ne s'en souciait pas.

Prenons un exemple amusant, pour éclairer ceci. La population est de plus en plus préoccupée par la mortalité par cancer, qui a beaucoup progressé depuis un demi-siècle. Le fait est exact, et de nombreux commentateurs l'attribuent à des altérations de l'environnement : nous ne vivons pas de manière aussi saine qu'autrefois, et la nature se venge en nous envoyant des cancers.

Mais le mathématicien voit les faits : nous vivons beaucoup plus longtemps, et si on prend une tranche d'âge arbitrairement fixée, mettons 0 - 80 ans, la mortalité par cancer dans cette tranche d'âge diminue ! Autrement dit, nous mourons maintenant à des âges avancés, de cancers, alors qu'auparavant nous mourions d'autre chose, plus jeunes !

Le rôle du mathématicien me paraît donc être, en un siècle où l'on voit revenir l'irrationnel au grand galop, la défense du rationnel. Mais "rationnel" veut dire "conforme aux lois de la raison, de la nature", et certainement pas conforme à une axiomatique.

#### **4. Un peu d'humilité**

Il est commun, chez les mathématiciens du monde académique, de se référer à la fameuse formule de Dieudonné : les mathématiques sont "l'honneur de l'esprit humain". Cela fait plaisir à peu de frais.

Von Neumann, dans son ouvrage "The Computer and The Brain" a un point de vue très différent : il parle de nos mathématiques comme d'un "accident historique", exactement comme les langues humaines. Il y a de très nombreux "modèles" de langues, avec des organisations et des syntaxes différentes et il pourrait y avoir des modèles de mathématiques différents. Von

Neumann fait observer que nos mathématiques diffèrent fondamentalement du système de codage de l'information utilisé par le cerveau humain.

On peut aller plus loin dans cette voie. Observons tout d'abord que nos mathématiques sont entièrement basées sur une construction axiomatique dérivée des nombres entiers, et que les nombres entiers n'existent pas dans la nature : ce ne sont que des approximations à l'échelle humaine.

Observons ensuite que nos mathématiques échouent en général lorsqu'il s'agit de décrire un phénomène physique, naturel, même les plus simples. On le sait, bien sûr, s'agissant du problème des trois corps, mais on peut généraliser ceci aux observations de la vie courante : un joueur de tennis qui renvoie la balle adverse le fait avec une précision étonnante, compte-tenu du peu d'informations dont il dispose et de la brièveté du temps de réaction qui lui est laissé. Assurément, son cerveau ne résout pas d'équations différentielles. On ne peut imaginer un système mathématique capable d'approcher ces performances.

L'arrogance des mathématiciens du monde académique est partagée par tous les praticiens des autres disciplines : chacun voit sa science plus haut qu'elle ne l'est, c'est humain, et j'aime à citer ce vers de Baudelaire :

"L'humanité bavarde, ivre de son génie".

Mais ce qui distingue le mathématicien des autres disciplines, c'est qu'il vit en vase clos. Un médecin, un physicien, sont bien obligés de s'apercevoir, de temps à autre, que leur art, leur science, sont imparfaits, puisqu'ils ne parviennent ni à guérir, ni à expliquer. Pour un mathématicien, s'il s'y prend bien dans sa carrière, il n'aura jamais ce souci : il peut impunément, toute sa vie durant, avec les louanges de ses collègues, définir lui-même les axes de sa recherche, publier tout ce qu'il veut et former sa descendance.

## 5. L'enseignement

En ce qui concerne l'enseignement des mathématiques, je formulerai le vœu (mais je n'ai aucun moyen d'en aider la réalisation) qu'il devienne proche des réalités, et qu'il abandonne le préalable axiomatique que l'on voit partout. Les jeunes que nous formons actuellement sont qualifiés pour passer des examens, mais ils n'ont ni curiosité ni sens des réalités.

*En 200 avant J.-C., Eratosthène, vivant à Alexandrie, avait appris qu'à Assouan se trouvait un puits dont les rayons du soleil éclairaient le fond, le 21 juin à midi. Assouan est au sud d'Alexandrie, sur le Nil, à 50 journées de marche de chameau. A partir de ces seules informations, Eratosthène a conçu une méthode pour mesurer la circonférence terrestre, et son estimation s'est révélée exacte à moins de dix pour cent près.*

Eh bien, pour moi, un mathématicien est quelqu'un capable d'un tel raisonnement. Mais je ne crois pas qu'il y ait aujourd'hui un seul professeur qui ait envie de parler d'Eratosthène à ses élèves. En revanche, je suis certain (j'ai essayé) que de nombreux élèves en seraient ravis.

## 6. Que peut-on faire ?

La question se pose : que peut-on faire si l'on souhaite intéresser davantage de mathématiciens au monde réel ? La réponse est nullement évidente. Depuis 14 années que la SCM existe, j'ai pu convaincre bon nombre d'entreprises, organismes, agences nationales ou internationales, que nos mathématiques pouvaient leur être utiles. Nous privilégions une approche simple et robuste, et nous parvenons à faire un peu mieux que les arts divinatoires.

En revanche, je ne crois pas avoir réussi à convaincre un seul de mes anciens collègues de s'intéresser au monde réel. Avant la SCM, lorsque j'étais professeur d'Université, nous avions une association Loi 1901, l'ICM, qui gérait des contrats, mais en 1995, lorsque la SCM a été créée, j'ai été le seul à "faire le saut" ; tous mes anciens collègues sont restés bien au chaud dans leur chaire. Aucun d'eux n'a changé ses publications d'un iota.

Quelques universités ont organisé des "master pro", tournés vers les applications, et c'est une fort bonne chose, mais cela, non plus, ne modifie en rien les thèmes de recherche des enseignants-chercheurs, qui restent les mêmes que par le passé.

Je ne crois pas à la capacité d'adaptation de la génération actuelle de mathématiciens : elle est trop imprégnée de bourbakisme et ne sera pas capable d'évolution. Ils n'ont pas la curiosité de découvrir le monde ; celui-ci leur fait peur, car (quelle horreur !) il est susceptible de contredire leurs publications.

Mais, comme disait Max Planck,

*« Une nouvelle vérité scientifique ne s'impose pas parce qu'on persuade ses adversaires et qu'on leur fait voir la lumière, mais plutôt parce que ceux-ci finissent par mourir et sont remplacés par une nouvelle génération pour laquelle cette vérité est devenue familière. »*

La première chose à changer, parce qu'elle conditionne le système d'évaluation des carrières dans le monde académique, est le système de publication. Actuellement, un projet d'article est jugé par les pairs, sur des bases uniquement de nouveauté et de technicité ; le résultat est consternant car, rédigées en un langage abscons, les publications ne sont lues par personne. Si, par extraordinaire, un résultat mathématique intéressant venait à apparaître, aucun des utilisateurs potentiels ne le remarquerait.

Mon souhait serait donc le développement d'un journal "Real Life Mathematics" : chaque article prendrait un problème concret, réel, et montrerait comment l'usage d'un outil mathématique a permis une solution du problème, au moins partiellement. Il y aurait donc ces trois étapes : le problème, correctement décrit, l'outil, et la mise en œuvre avec une mesure de succès : qu'a-t-on réellement amélioré ?

Sur notre site web, notre programme de recherche appelé Robust Mathematical Modeling ([www.scmsa.eu/robust.htm](http://www.scmsa.eu/robust.htm)) fonctionne un peu sur ce principe, mais il s'agit de notes techniques et, à ce jour, nous n'avons pas d'articles décrivant complètement la résolution d'un problème.



Le mode de fonctionnement pourrait être celui d'un journal électronique : la publication sur un site web permet la remise à jour, les discussions, l'ajout de commentaires, etc.

Il est nécessaire d'y associer les utilisateurs. Les mathématiciens doivent finir par comprendre qu'ils sont une discipline de services, et que l'utilisateur seul peut définir les étapes 1 et 3 : en quoi consiste le problème, et en quoi a-t-on progressé dans sa solution ? Une publication laissée aux seuls mathématiciens est donc entièrement à bannir.

Mais là encore, je n'ai personnellement jamais rencontré de difficulté pour rédiger et publier un article avec des utilisateurs de nos mathématiques : pour citer les plus récentes, nous avons un article avec des physiciens de l'Institut de RadioProtection et de Sécurité Nucléaire (amélioration des mesures d'uranium par des techniques probabilistes), un article avec un responsable de l'Agence Européenne de l'Environnement (méthodes probabilistes pour l'environnement) et un projet d'article avec un ingénieur de l'Agence Nationale pour les Déchets Radioactifs (incertitudes sur la propagation des radionucléides dans le sol).

Se posent souvent, bien sûr, des questions de confidentialité et de propriété qu'il ne convient pas d'ignorer, mais dans la plupart des cas les organismes et entreprises sont désireux de rédiger, de manière générique, un "manuel de bonnes pratiques", qui aide au transfert du savoir. Les outils mathématiques utilisés y ont évidemment leur place.

Il n'est donc pas impossible à la communauté mathématique française de retrouver, en ce début du 21<sup>ème</sup> siècle, la place qu'elle occupait au début du 20<sup>ème</sup>, avec Poincaré et bien d'autres : une discipline ouverte, utile, progressant et se remettant constamment en question. Il suffit pour cela de perdre l'arrogance et l'académisme qui ont marqué la seconde moitié du 20<sup>ème</sup> siècle.

bernard.beuzamy@scmsa.com